Leçon 152 : Déterminants. Exemples et applications

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel.

1. Rapport du jury. — 2017 :

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 et, dans ce cas, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur R ou C, il est délicat de définir det(A-XIn) avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. On peut rappeler son rôle dans les formules de changement de variables, par exemple pour des transformations de variables aléatoires. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'omettra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur Z avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

2. Déterminant d'une matrice. — 0

1. *Définitions et propriétés.* — Nota : la définition et le calcul d'un déterminant restent inchangés si on prend A anneau intègre et commutatif au lieu de $\mathbb{K}$.

- **(item 1)** : Forme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ définie par récurrence comme développement selon la première ligne.
- Exemples :
  - matrice triangulaire
  - I_n. λI_n
  - Règle de Sarrus pour la dimension 3.
- **(item 2)** : propriétés caractéristiques que l'on obtient par récurrence.
  - Pro : fonction linéaire des colonnes.
  - Lemme : si deux colonnes adjacentes sont identiques, le déterminant est nul.
  - Lemme : si on intervertit deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.
  - *Cor et Déf : le déterminant est une forme alternée (ie que le déterminant s'annule dès que deux colonnes sont identiques)*

2. *Lien avec les permutations.* —

- **(item 3)** Permutation des colonnes : $Det(C_{\sigma(1)}, \cdots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\dot{D}et(C_1, \cdots, C_n)$
- **(item 4)** Théorème principal : le déterminant est nul ssi la famille des vecteurs colonnes est liée.
- **(item 5)** Formule explicite :

$$det(A) = \Sigma_{\sigma\in\mathscr{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

- Conséquences importantes :
  - **(item 6)** : si f est une forme n-linéaire alternée, elle est entièrement définie par son image d'une base $e_1, \cdots e_n$. $f(v_1, \cdots, v_n) = det(v_1, \cdots, v_n)\dot{f}(e_1, \cdots, e_n)$. En d'autres termes, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
  - **(item 7)** :$det({}^tA) = det(A)$, ce qui donne une version "par lignes" des résultats énoncés par colonnes :
    - le déterminant est une fonction linéaire des lignes
    - le déterminant est une forme alternée des lignes.
    - si on permute les lignes, le déterminant est multiplié par la signature de la permutation en question.
    - le déterminant est nul ssi la famille des vecteurs lignes est liée.
  - **(item 8)** : $det(AB) = det(A)det(B)$
  - Cor : en particulier si A est inversible, $det(A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(A)})$
  - Cor : on peut parler du déterminant d'un endomorphisme car $det(P^{-1}AP) = det(A)$

3. *Calcul de déterminants.* —

- **(item 9)**
- Algorithme : puisque le déterminant d'une matrice triangulaire est évident, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss qui fait intervenir $\mathscr{O}(n^3)$ opérations.
- **(item 10)** Déterminant de Vandermonde
- Déterminants par blocs $n \times n$
  - Si A et B sont des matrices carrées d'ordre k et $n-k$, et $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ alors $det(H) = det(A)det(B)$ (car on a $H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$)
  - Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, et $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ alors $det(H) = det(A+B)det(A-B)$
  - Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, et $H = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ alors $det(H) = det(A^2+B^2)$
- Matrice compagnon
- Déterminant circulant
- Déterminant de Cauchy

4. *Application à l'algèbre linéaire et multi-linéaire.* —

– **(item 11)** : théorème de Cramer pour résoudre un système de n éuqations et construction explicite de $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t Com(A)$. Utile sur le plan théorique plus que pratique ($\mathcal{O}(n!)$ opérations).
– **(item 12)** : Polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton.
– **(item 13)** : Détermination du rang d'une matrice (ou morphisme) par le calcul des mineurs.
– Suites exactes courtes. $SL(n,\mathbb{K})$ et $SO(n,\mathbb{K})$
– **(item 14)** : Le résultant des deux polynômes P et Q est le déterminant de leur matrice de Sylvester. (admis)

5. *Application à la géométrie.* —
– **(item 15)** : volume dans $\mathbb{R}^n$.
  - Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in E^n$.
  - On appelle déterminant de Gram : $\Gamma(a_1, \cdots, a_n) = det(\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix})$
  - Pro : le volume du pavé déterminé par les a_i est donné par $\Gamma(a_1, \cdots, a_n)$ et $\Gamma(a_1, \cdots, a_n) \leq \Pi_{i=1}^n \|a_i\|^2$
  - Développement : ellipsoïde de Lowener
– **(item 16)** : Distance d d'un vecteur x à un sev V de base $e_1, \cdots, e_k$. Elle est donnée par $d^2 = \frac{\Gamma(e_1, \cdots, e_k, x)}{\Gamma(e_1, \cdots, e_k, x)}$
– **(item 17)** : Angle orienté.

6. *Application à l'analyse.* —
– **(item 18)** : l'application déterminant est C^∞
– **(item 19)** : $GL(n,\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M(n,\mathbb{K})$
– **(item 20)** : $GL(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
– Changement de variable en intégration : déterminant du Jacobien.
– Développement : Théorème de Muntz
– **(item 21)** : (Développement) - Déterminant de Hadamard

Développement 1 : ***Déterminants de Hadamard***

Développement 3 : ***Théorème de Muntz***
Développement 2 : ***Ellipsoïde de Lowener***

.
Sources :

– *Mansuy - Mneimné : "Réduction des endomorphismes"*
– *J. Grifone "Algèbre Linéaire"*
– *X. Gourdon "Les Maths en tête : Algèbre"*
– *D. Perrin "Algèbre Générale"*
– *Rouvière "Petit guide du calcul différentiel"*

October 9, 2018
Bruno Nitrosso, EPP et CNED