1. Leçon 153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Rapport du jury *Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$ et connaître sa dimension sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre. Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $K[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).*

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Polynômes d'endomorphisme. — 0

1. *Algèbre $\mathbb{K}[u]$: —*

- **(item 1)** : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de $E \to E$.
- **(item 2)** : Avec la notation $u^n = u \circ \cdots u$, on peut associer à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = \Sigma a_k X^k$, un endomorphisme $v = \Sigma a_k u^k$.
- **(item 3)** Quelques remarques :
  - $\mathbb{K}[u] = Im(\Phi)$ est bien commutative.
  - L'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathscr{L}(E)$ ainsi définie constitue un morphismes de $\mathbb{K}$ algèbres.
  - En tant que morphisme d'espaces vectoriel et puisqu la $\mathbb{K}$-dimension de $\mathbb{K}[X]$ est infinie alors que $\mathbb{K}$-dimension de $\mathscr{L}(E)$ est n^2, $Ker(\Phi)$ est non réduit à $\{0\}$.
  - En tant que morphisme d'anneaux, $Ker(\Phi)$ est un idéal.

2. *Polynôme Minimal : —*

- **(item 4)** Pro : $\mathbb{K}[X]$ étant un anneau principal (car euclidien), il existe un polynôme engendrant $Ker(\Phi)$. On appelle "polynôme minimal de u" l'unique générateur unitaire et on le note m_u.
- Nota : tout polynôme annulateur sera donc divisible par ou associé à m_u.
- **(item 5)** Pro : $\mathbb{K}[X]/(m_u) \sim \mathbb{K}[u]$ et, puisque $\mathscr{L}(E)$ est de dimension n, le degré d de m_u est tel que $d \leq n$.
- **(item 6)** Pro : $(Id, u, u^2, \cdots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. La dimension de $\mathbb{K}[u]$ est donc le degré du polynôme minimal de u.
- **(item 7)** Rqe : on peut appliquer le même raisonnement aux matrices de $\mathscr{M}(n, \mathbb{K})$ et deux matrices semblables, étant attachés à un même endomorphismes dans différentes bases, auront des algèbres isomorphes.

Quelques applications simples :

- **(item 8)** App : pour calculer $P(u)$ on peut toujours diviser diviser par m_u et se ramener ainsi à un calcul d'un polynôme de degré au plus d.
- **(item 9)** App : si $a_0 \neq 0$, alors on peut fabriquer u^{-1} dans $\mathbb{K}[u]$ par : $u(\frac{-1}{a_0}\Sigma_{k=1}^{d} a_k u^k) = 1$
- Nota : ces procédés de calcul de u^n ou de u^{-1} sont généralement plus courts que de passer par une diagonalisation préalable.
- **(item 10)** Pro : si $m_u(X) = \prod Q_i(X)$ avec les Q_i deux à deux premiers entre eux, le lemme Chinois s'applique et $\mathbb{K}[u] \sim \mathbb{K}[X]/(m_u) \sim \prod \mathbb{K}[X]/(Q_i(X))$.
- Exe : si s telle que $s \circ s = Id$ (involution), alors $m_u(X)$ divise $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2 et si s n'est pas triviale, on aura alors $\mathbb{K}[s] \sim (\mathbb{K}[X]/(X-1) \times \mathbb{K}[X]/(X+1))$.
- Exe : si p telle que $p \circ p = p$ (projection), alors $m_u(X)$ divise $X^2 - X = X(X-1)$ et, si p n'est pas triviale, on aura alors $\mathbb{K}[p] \sim (\mathbb{K}[X]/(X-1) \times \mathbb{K}[X]/(X)$.

Remarques et propriétés :

- **(item 11)** Deux endomorphismes conjugués ont même polynôme minimal.
- **(item 12)** Idem pour deux matrices semblables (qui partagent les endomorphismes sous-jacents).
- **(item 13)** Deux endomorphismes non conjugués (resp. deux matrices non semblables) peuvent avoir un même polynôme minimal.
- Exe : on a vu que tous les projecteurs non triviaux ont $X(X-1)$ pour polynôme minimal.
- **(item 14)** Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $u_{|F}$ est un endomorphisme et $m_{u_{|F}}$ divise m_u.
- Développement possible : commutant et polynôme minimal.

3. *Valeurs propres et espaces propres : —*

- **(item 15)** Déf : λ est valeur propre de u (resp. A) s'il existe un vecteur x (resp. X) non nul tel que $u(x) = \lambda x$ (resp. $AX = \lambda X$).
- **(item 16)** Def : on appelle spectre de u (resp. A), noté $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ (resp. $Spec_{\mathbb{K}}(A)$), l'ensemble des valeurs propres de u (resp. A).
- Notation : on notera d'après J. Grifone $Spec'(u)$ la collection où les λ peuvent apparaître plusieurs fois, une par degré de la racine λ dans le polynôme caractéristique. Cette notion de collection se distingue donc d'un ensemble et on la notera $\{\{\}\}$
- Exemples simples :
  - $Spec_{\mathbb{K}}(id) = \{1\}$, $Spec'_{\mathbb{K}}(id) = \{\{1, 1, \cdots, 1\}\}$
  - $Spec_{\mathbb{K}}(s) = \{1, -1\}$ où s est une involution non triviale.

- $Spec_{\mathbb{K}}(p) = \{1, 0\}$ où p est une projection non triviale.
- **(item 17)** Pro : $Spec_{\mathbb{K}}(f \circ g) = Spec_{\mathbb{K}}(g \circ f)$

– **(item 18)** Pro : $\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$ ssi λ est racine de m_u.
– Def : on appelle sous-espace propre associé à λ, noté E_λ les vecteurs propres de λ plus 0. C'est un sous-espace vectoriel.

4. *Polynômes Annulateurs :* —

– Les polynômes annulateurs correspondent aux éléments de $Ker(\Phi)$.
– Nota : les calculs de u^n ou u^{-1} évoqués précédemment peuvent aussi être faits par division euclidienne par un polynôme annulateur autre que m_u si cela s'avère plus pratique.
– **(item 19)** Pro : P est un polynôme annulateur de u ssi m_u divise (ou est associé à) P.
– **(item 20)** Pro : comme pour tout $\lambda \in Spec_{\mathbb{K}}(u)$, $X - \lambda$ divise m_u, $X - \lambda$ divise $P \in Ker(\Phi)$.
– Cor : Si $Q(u) = 0$ alors $Spec_{\mathbb{K}}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines sur $\mathbb{K}$ de Q.

5. *Polynôme caractéristique :* —

– **(item 21)** Def : $P_u = det(u - Xi)$ dit "polynôme caractéristique" de u. (On peut faire de même pour les matrices carrées).
– **(item 22)** Pro : λ est valeur propre de u ssi $det(u - \lambda id) = 0$. Ie racine du polynôme caractéristique.
– **(item 23)** Def : on appelle *sous-espace caractéristique* associé à λ, $Ker(u - \lambda id)^\alpha$ où α est le degré de la racine λ dans le polynôme caractéristique. C'est un sous-espace vectoriel.
– **(item 24)** Thé : *théorème de Cayley-Hamilton.* $P_u(u) = 0$.
– **(item 25)** Cor :
- m_u divise P_u.
- $deg(m_u) \leq n$
- m_u et P_u ont les mêmes racines (mais pas forcément avec la même multiplicité).
- Pro : m_u *est scindé ssi* P_u *est scindé.*

– **(item 26)** Pro : $Tr(A)$ coefficient de X^{n-1} de $P_A(X)$. Et $det(A)$ est le coefficient constant de $P_A(X)$.
– Exe : Exemple :
- Étant donnés $n - 1$ scalaires arbitraires a_i, on peut fabriquer une matrice A non diagonalisable de sorte que $Spec_{\mathbb{K}}(A) = \{a_i\} \cup \{\Sigma a_i\}$: $A = (C_i)$ avec chaque colonne C_i composée de a_i sauf la i-ème composante qui est nulle.

2. Écriture simplifiée des endomorphismes (resp. matrice) et applications. —

1. *Notions et notations.* —

– On cherche à décrire les endomorphismes dans des bases intégrant les vecteurs propres pour en simplifier le calcul. Ceci correspond à obtenir sur ces bases des matrices particulières : nous raisonnerons donc matriciellement sur la base d'une matrice A associée à un endomorphisme f.
– **(item 27)** Def : une matrice $T = (t_{ij})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $\forall i > j$, $t_{ij} = 0$ (resp. $t_{ji} = 0$).Une matrice A est "trigonalisable" si elle est semblable à une matrice triangulaire T_A.
– Remarques :
- Rem : Toute matrice triangulaire supérieure est semblable (par permutation circulaire de sa base) à sa tranposée qui est triangulaire inférieure.
- Rem : le calcul de $P_f = P_A = P_{T_A}$ est alors trivial : $P_f(X) = \Pi(X - t_{ii})$ les éléments diagonaux correspondent alors exactement aux valeurs propres de T et elles apparaissent avec leur multiplicité dans P_f.

– Def : D est diagonale ssi les seuls termes non nuls sont les d_{ii}. A est diagonalisable si semblable à une matrice diagonale.
– On note p_i, m_i la multiplicité de λ_i dans P_u et m_u respectivement. On note n_i la dimension du noyau de $u - \lambda_i id$.

2. *Conditions de diagonalisabilité/triangulabilité.* —

– **(item 28)** Pro : une matrice A est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique (resp. minimal) est scindé dans $\mathbb{K}$. Toute matrice est alors trigonalisable sur un corps algébriquement clos, notamment sur $\mathbb{C}$.
– Applications : **Développement** - *Résolution de systèmes d'équations linéaires.* En effet, la résolution de $TX = b$ s'effectue par descente (ou remontée) et prend $n(n - 1)/2$ opérations x+.
- Méthode directe : décomposition LU (ou pivot de Gauss) avec $O(n^3)$ opérations x+. Puis descente/remontée des triangles pour $O(n^2)$ opérations x+.
- Méthode itérative de Gauss-Seidel et Gauss-Seidel-Southwell (relaxation). $A = M - E - F$ avec M diagonale et E, F triangulaires (sup et inf). On résout $M - E$ à chaque itération.

– **(item 29)** Pro : les sev E_{λ_i} sont en somme directe et $n_i \leq p_i$.
– Cor : u est diagonalisable ssi la dimension des E_λ sont maximales (ie $n_i = p_i$).
– **(item 30)** Développement :
- **(item 31)** *Lemme des noyaux* : si Q est un polynôme annulateur de f avec $Q = \prod Q_i$ et $Q_i \wedge Q_j = \delta_{ij}$ alors les sev $Ker(Q_i(f))$ sont en somme directe et leur somme fait E.
- **(item 32)** Cor : m_f est diagonalisable ssi m_f est scindé et ses racines sont simples.
- Nota : il est donc suffisant d'avoir un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

– Applications :
- Calcul de A^n (mais la division par m_u fonctionne aussi).
- Calcul de systèmes de suites récurrentes liées.
- Résolution d'un système d'équation différentielles linéaires.

3. *Décomposition de Dunford.* — **Développement :** Il existe une décomposition plus riche que la triangulation.

- On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, $E \mathbb{K} - ev$ de dimension n.
- $P_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
- Alors, $\exists d, n$, deux endomorphismes respectivement diagonalisable et nilpotent tels que :
- $f = d + n$
- $dn = nd$ (n et d commutent).
- Cette décomposition est unique sous ces conditions.
- Application : $Exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.
- $Exp(u)$ est diagonalisable ssi u l'est.

Sources :

- Algèbre Linéaire (Grifone)
- Réduction d'endomorphismes (Mansuy et Mneimné)
- Maths en tête (X.Gourdon)
