

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et E un espace vectoriel.

1. Rapport du jury. — 2017 : *Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Moebius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite n vers infini ...).*

2. Cardinaux - Dénombrement Fini ou Infini. —

1. Relations d'équipotence et pré-ordre. —

- Def : *équipotence* - Deux ensembles A et B sont équipotents s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. C'est une relation d'équivalence (composition des fonctions). On notera $A \sim B$. On dira aussi qu'il ont même cardinal.
- Def : Soit deux ensembles A et B , s'il existe une surjection de $A \rightarrow B$, on dira que A a un cardinal inférieur ou égal à celui de B et on le notera $A \preceq B$. C'est une relation de pré-ordre.
- Pro : $(A \preceq B) \iff$ il existe une injection de $B \rightarrow A$.
- Rem : ce résultat nécessite en général l'axiome du choix. Exceptions : ensembles finis et ensemble bien ordonnés (cf. “les chaussettes et les chaussures” de Bertrand Russell).
- Def : on aura une relation stricte, notée $(A \prec B)$, lorsqu'il n'existe pas une surjection (resp. injection) dans le sens inverse.
- Développement 1 : *Théorème de Cantor-Bernstein (d'après méthode Julius König -1906)*
 - Thé : s'il existe une injection de $A \rightarrow B$ et une injection de $B \rightarrow A$, alors il existe une bijection de $A \rightarrow B$ (et par symétrie une bijection $B \rightarrow A$).
 - Rem : grâce à ce théorème, quels que soient A et B , on aura une et une seule relation entre leurs cardinaux parmi $\prec, \sim$ et $\succ$.
- Pro : $(A \subseteq B) \implies (A \preceq B)$

Ensembles finis. — :

- Def : un ensemble est fini s'il existe un entier N et une surjection de $\{1, \dots, N\}$ vers cet ensemble.
- Def : Le Cardinal d'un ensemble fini est le plus petit n permettant cette surjection.
- Pro : Cette surjection sera alors forcément une bijection.
- Pro : $[(A, B \text{ finis}) \wedge (A \subseteq B) \wedge (Card(A) = Card(B))] \implies (A = B)$
- Pro : Quelques dénombrements classiques
 - nombre de sous-ensembles de A : $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^n$
 - nombre de sous-ensembles de A à k éléments : C_n^k
 - nombre de sous-ensembles ordonnés (arrangements) à k éléments : A_n^k
 - nombre de fonctions de $A \rightarrow B$: $(Card(A))^{Card(B)}$.
 - nombre d'éléments dans le produit d'ensembles A_i de cardinaux n_i : $\prod n_i$
 - nombre de permutations d'un ensemble A à n éléments : $n!$

Ensembles infinis. — :

- Def : un ensemble est infini s'il n'est pas fini.
- Def : $\mathbb{N}$ est infini. Il a pour cardinal $\aleph_0$.
- Def : Ensembles dénombrables. Ensembles “au plus dénombrables”.
- Pro : Soit A et $x \in A$. $[Card(A \cup \{x\}) = Card(A)] \iff$ l'ensemble A est infini.
- Exe : L'hôtel de Hilbert.
- Pro : Tout ensemble infini possède une sous-partie de cardinal $\aleph_0$.
- Pro : $\forall A, Card(\mathcal{P}(A)) \prec Card(A)$. On a donc une infinité de cardinaux.
- Pro : $Card(\mathbb{R}) = Card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et donc $Card(\mathbb{R}) \prec Card(\mathbb{N})$. Ce cardinal s'appelle la puissance du continu, que l'on note c .
- Pro (admis) : (*théorème de Kurt Gödel - Paul Cohen*) - La proposition $\aleph_1 = c$ est indécidable dans le cadre des axiomes de Zermelo-Fraenkel.

3. Applications : prouver qu'un ensemble est infini. —

1. Par l'absurde. —

- Pro : (développement 3.0) $Card(\mathbb{P})$ est infini par la méthode d'Euclide.

2. Surjection vers un ensemble infini ou une injection depuis un ensemble infini. —

- Pro : (développement 3.1) Injection des nombres de Fermat (infinis) vers les nombres premiers.
- Pro :

3. Vérifier une propriété. — Soit une propriété que seul un ensemble infini vérifie, alors pour montrer qu'un ensemble est infini il suffit de prouver qu'il vérifie la propriété.

- Pro : “Si une série est non convergente, alors forcément sa “YYY”base” est infinie”.
- App : (développement 3.2) : La suite harmonique limitée aux nombres premiers diverge. Donc $Card(\mathbb{P})$ est infini.
- Pro : “Les ouverts associés à la topologie $N_{a,b} = \{a + pb : p \in \mathbb{Z}\}$ sont infinis”.
- App : $Card(\mathbb{P})$ est infini car $\bigcup_{\mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ et est fermé.

4. Applications : prouver qu'un ensemble est (ou n'est pas) dénombrable. —

1. Surjection et injection vers deux ensembles dénombrables. — On aura ainsi : $\text{Card}(B1) \leq \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B2)$

- Pro : $\mathbb{N}^p \sim \mathbb{N}$: surjection canonique et injection $\mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ par la méthode de Goedel.
- Pro : $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$: $\frac{n}{p} \mapsto n$ et Goedel.
- Pro : $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$: surjection impossible de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par “argument de la diagonale de Cantor”.
- Pro : $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$: (méthode de J. König). Bijection entre $]0, 1]^2$ et $]0, 1]$. (Développement 2.2).

– Proofs from THE BOOK

–

– Hauchecorne

December 21, 2017

Bruno Nitrosso, EPP et candidat libre

5. Méthodes de dénombrement finis. —

1. Principe des tiroirs. — Si l’on dispose de m ensemble(s) et que l’on y range n objet(s) avec $n > m$, alors au moins un de ces ensembles contiendra plusieurs objets.

- Exe : Si on prend $n + 1$ éléments parmi $\{1, 2, \dots, 2n\}$, alors l’un d’entre eux en divise un autre.
- Développement 4 : Théorème des deux carrés

2. Principe du double dénombrement. — On utilise des propriétés liées à la cardinalité d’un ensemble A afin de calculer $\text{Card}(A)$ de deux façons différentes pour obtenir une égalité entre deux valeurs.

- Exe : nombre moyen de diviseurs d’un entier n
- Exe : la somme des degrés des sommets d’un graphe est égale à deux fois le nombre d’arêtes.

3. Application de l’algèbre : groupes et espaces vectoriels. —

- Théorème de Lagrange
- Action de groupe et formule des classes
- Dénombrement des corps finis

4. Divers. —

- Fonction indicatrice d’Euler
- Nombre de Catalan
- Nombre de Bell
- Lemme de Sperner (admis en dimension > 2)
- Méthodes probabilistes

5. Développements : —

- Développement 1 : *Th. Cantor-Bernstein*
- Développement 2 : *Deux bijections célèbres : $\mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \rightleftharpoons \mathbb{R}^2$*
- Développement 3 : *Plusieurs méthodes pour prouver que les nombres premiers sont infinis*
- Développement 4 : *Théorème des deux carrés*

6. Sources : —