Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.)

Cadre : (E,μ) est un espace topologique. (X,d) est un espace métrique.

1. Rapport du jury. —

2017 : *Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général (confusion entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité), et de se concentrer en priorité sur le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass (version qui utilise pertinemment la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser comme application à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels. Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.*

2. Généralités. —

1. *Définitions par la propriété de Borel-Lebesgue.* — :

- Def : E est un *espace compact* ssi de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Def équivalente : E est un *espace compact* ssi de toute collection de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-collection d'intersection vide.
- Def : une partie A de E est dite *partie compacte* ssi de tout recouvrement par des ouverts de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Def équivalente : une *partie compacte* A de E est un espace compact A pour la topologie induite.

2. *Définition équivalente en espaces métriques - Propriété de Bolzano-Weierstrass.* — :

- Pro : X métrique est un *espace compact* ssi de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite convergente.
- Pro : $A \subset X$ métrique est une *partie compacte* ssi de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite est aussi dans A.
- Pro : toute suite de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X.
- Pro : Toute partie infinie de X admet au moins un point d'accumulation.

3. *Exemples.* — :

- Exe : tout espace topologique fini est compact.
- Cexe : $\mathbb{R}$ n'est pas compact et on ne peut extraire de sous-recouvrement fini de $\{[-n,n]; n \in \mathbb{N}\}$
- Exe : Pour toute suite (u_n) d'éléments d'un compact E convergeant vers une limite l, $\{u_i : i\mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte.

3. Propriétés. —

1. *Générales.* —

- Pro : Un espace métrique compact est borné.
- Pro : Un espace compact est complet.
- Pro : Espaces produits d'espaces - $X = \Pi_1^n X_i$ est compact ssi $\forall i X_i$ est compact.
- Parties Compactes :
  - Pro : Toute partie fermée d'un espace compact est une partie compacte.
  - Pro : Toute partie compacte d'un espace topologique est une partie fermée et bornée.
  - Une réunion finie (??????) de parties compactes est compacte.
  - Une intersection de compacts est compacte.
  - Pro : les fermés bornés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie sont les seules parties compactes.
  - Rem : Ceci est faux en dimension infinie

2. *En lien avec la continuité.* —

- Pro : l'image continue d'un ensemble compact ou d'une partie compacte est une partie compacte.
- App :
- Thé : Théorème de Heine - Si X, Y sont deux espaces métriques et si $f : X \to Y$ est continue, alors, si X est compact, f est uniformément continue.
- Soit $f : X \to Y$ d'un escpace métrique compact X vers un métrique Y. Si f est continue, f est bornée et atteint ses bornes.
- Thé : théorème de Rolle.
- Thé : théorème du point fixe.
- Développement : *Stone-Weierstrass réel* Toute sous-algèbre *séparante* de $\mathbb{C}(X,\mathbb{R})$ contenant les fonctions constantes est dense $\mathbb{C}(X,\mathbb{R})$.
- App : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass ("toute fonction continue est limite uniforme de fonctions polynômes").
- App : toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur d'une suite de polynômes trigonométriques. Y compris la fonction périodique continue et nulle part dérivable.

Développement 1 : *Brouwer*

Développement 2 : *Théorème de Stone-Weierstrass*

.

Sources :

– *X. Gourdon "Analyse - Les Maths en tête"*
– *Hauchecorne*

December 8, 2017

Bruno Nitrosso, EPP et candidat libre