Leçon 202 : Exemples de parties denses et applications

Cadre : (E, μ) est un espace topologique. (X, d) est un espace métrique. *Définitions équivalentes* :

- Def : Une partie A est dense dans E topologique ssi son adhérence est E.
- Pro : Une partie A est dense dans E topologique ssi $\forall e \in E$, tout voisinage de e intersecte A.
- Pro : Une partie A est dense dans X métrique ssi $\forall x \in X \exists u = (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que u converge vers x.

1. Rapport du jury. —

2017 : *Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme les sous-groupes additifs de R et leurs applications (par exemple la densité des* $(cos(n\theta)n \in \mathbb{N})$*, ou encore les critères de densité dans un espace de Hilbert. Le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein peut être abordé à des niveaux divers (le choix du point de vue probabiliste exige d'en maîtriser tous les aspects) suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence voire son optimalité. Des exemples matriciels trouvent leur place dans cette leçon comme l'étude de l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans* $\mathbb{C}$ *(et même dans* $\mathbb{R}$ *pour les candidats voulant aller plus loin.) Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de Weierstrass (le théorème de Stone-Weierstrass) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces Lp. Il est également possible de parler de l'équirépartition.*

2. Cas d'espaces vectoriels normés de dimension finie. —

1. *Densité dans les nombres réels et complexes.* —

- Pro : Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall a < b \in \mathbb{R}([a, b] \cap A \neq \emptyset)$
- Exe : $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Rem : Alors que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Lien avec le caractère "archimédien".
- Exe : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.
- Pro : Le seul morphisme de corps sur $\mathbb{R}$ est l'identité.
- Pro : Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $q\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- App : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
- Conséquences :
  - $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
  - La suite $(sin(n))$ est dense dans $[-1; 1]$.
  - $\{exp(2i\pi nt)tqn \in \mathbb{N}$ est dense sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ ssi $t \notin \mathbb{Q}$.
  - Cexe : Grâce à $\mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ où $r \notin \mathbb{Q}$, on exhibe un contre-exemple à l'implication (fausse) qui voudrait que la somme de deux fermés soit un fermée.
- Développement : *Suites équi-réparties* et *Critère de Weyl.*

2. *Densité dans les matrices et espaces vectoriels de dimension finie. — Si* $\mathbb{K}$ *représente* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, en notant* $D_n(\mathbb{K}), T_n(\mathbb{K})$ *les matrices Diagonalisables et Trigonalisables de* $D_n(\mathbb{K})$:

- Pro : $D_n(\mathbb{K})$ est dense dans $T_n(\mathbb{K})$
- Pro : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$
- Pro : $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $M_n(\mathbb{R})$
- Pro : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
- App : $\chi AB = \chi BA \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$.
- App : Théorème de Cayley-Hamilton sur C

3. Densité dans les espaces de fonctions. —

xx :

- Pro : Th. de Weierstrass. Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

1. *Vrac à vérifier.* — : supposons qu'il existe une injection continue de R2 dans R. Par restriction on obtient une injection continue f de la sphère unité S dans R. Comme S est compacte et connexe, f réalise un homéomorphisme entre S et f(S), qui est compact et connexe donc de la forme $[a; b]$. Soit c dans S tel que f(c) soit différent de a et b. Alors $S - c$ (connexe) est homéomorphe à $[a; cc; b]$ (non connexe), impossible. un argument simple pour montrer qu'il n'y a pas de surjection f est C1 de RdsR2. En effet, f est alors une fonction localement lipschitzienne. Donc l'image du segment $[n; n + 1]$ est de dimension de Hausdorff 1, et donc l'image $f(R) = Union$ des $nf([n; n + 1])$ est aussi de dimension de Hausdorf 1, ce qui n'est pas le cas de R2. oui, il n'y a pas de surjection $S(x) = (f(x); g(x))$ différentiable: Dans le cas contraire, soit E l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f^{(x)=0}$. Alors $f(E)$ est de mesure nulle (théorème de Sard). Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $F_x = \{z \in \mathbb{R} : f(z) = x\}$. Comme S est surjective, F_x est indénombrable, donc admet un point d'accumulation a_x. Clairement, $f^{(ax)=0}$ et $f(ax) = x$, donc $fx = (ax) \in f(E)$. Cela montre que $f(E) = \mathbb{R}$, et donc n'est pas de mesure nulle: contradiction.

Développement : il existe

- bijection entre R et R2: oui!
- surjection **continue** de R sur R2: oui aussi!
- injection continue de R2 dans R: non (fiabilité 99,9
- surjection **dérivable** de R sur R2: non!
- injection dérivable de R2 dans R: non!

Développement 1 : ***Berlekamp***

Développement 2 : ***Théorème de Gauss-Lucas***

Développement 3 : ***Cayley-Hamilton***

.

Sources :

- *D. Perrin "Algèbre Générale"*

– *Dany-Jack Mercier "Corps Finis"*
– *J. Calais "Extension des corps - Théorie de Galois"*
– *Jeanneret - Lines "Invitation à l'Algèbre"*
– *Hauchecorne*

December 8, 2017

Bruno Nitrosso, EPP et indépendant