Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications

Cadre : (X,μ) est un espace topologique. (E,d) est un espace métrique. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, implicitement munis de leur distance usuelle, issue de la norme euclidienne. On associe la norme discrète à $\mathbb{Z}$ et à $\mathbb{N}$.

1. Rapport du jury. — 2017 : *Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon : en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, l'identification des connexes de R sont des résultats incontournables. On distinguera bien connexité et connexité par arcs (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. A contrario, on pourra distinguer leur comportement par passage à l'adhérence. La notion de composantes connexes doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité sera un point apprécié par le jury. Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront valorisés. Le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge..*

2. Généralités : définitions, appropriation, propriétés. —

1. *Espace Connexe.* — Si un espace métrique (E,d) (resp. (X,μ) topologique) vérifie les propriétés suivantes qui sont équivalentes, il est dit *espace connexe* :

- Def : Il n'existe pas de partition de E (resp. X) en deux ouverts non vides (disjoints puisque partition).
- Def : Il n'existe pas de partition de E (resp. X) en deux fermés non vides (disjoints puisque partition).
- Def : E (resp. X) et $\emptyset$ sont les deux seuls sous-ensembles de E (resp. X) à être à la fois ouverts et fermés.

Exemples et Appropriation

- Rem : la notion de connexité est purement topologique.
- Rem : l'idée derrière : "c'est pré-séparé" versus "séparer serait déchirer".
- Cexe : $\mathbb{Z}$ muni de la distance discrète n'est pas connexe.
- Exe : $(\mathbb{R},||)$ est connexe.
- Cexe : $R\cup\{i\}$ n'est pas connexe.
- Pro : Soit $(E_1,d_1),\dots,(E_n,d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E=E_1\times\cdots\times E_n$ est connexe si et seulement si $\forall i E_i$ est connexe.

2. *Partie connexe.* — : Une partie A d'un espace métrique (E,d) (resp. (X,μ) topologique) vérifie les propriétés suivantes qui sont équivalentes, on dit qu'il s'agit d'une *partie connexe* :

- Def : Si on recouvre A par deux ouverts disjoints de E (resp. X) alors un de ces deux ouverts est l'ensemble vide.
- Def : Si on recouvre A par deux fermés disjoints de E (resp. X) alors un de ces deux fermés est l'ensemble vide.
- Pro : une partie A connexe de E si A est connexe pour la topologie induite.

Exemples et Appropriation

- Exe : tout singleton est une partie connexe.
- Rem : si A et B sont connexes, $A\cup B$ ne l'est pas en général. Exemple $\{1\}\cup\{0\}$ n'est pas connexe. Nous avons en revanche ces deux propriétés :
  - Pro : Sur un espace métrique, la réunion de deux parties connexes (a fortiori quelquonque) distantes d'une valeur non nulle (et donc notamment disjointes et aux adhérences disjointes) n'est jamais une partie connexe.
  - Pro : La réunion de deux parties connexes dont les adhérences sont disjointes n'est pas connexe.
  - Pro : La réunion de deux parties connexes dont les adhérences ont une intersection non vide est connexe. A fortiori si les parties elles-mêmes ont une intersection non vide.
- Cexe : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe : on peut le "couper" en deux ouverts. Ce sont les "coupures" de Dedekind.
- Cexe : $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ n'est pas connexe pour les mêmes raisons.
- Exe : $I=[a,b]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

3. *Caractérisation et propriétés.* —

- Pro : Soit $f:(X,\mu)\to(F,\delta)$ où F est un espace discret (dont notamment $\{0,1\}$). Alors, f est continue et non constante, entraîne que E n'est pas connexe.
- Pro : Si $f:(E,d)\to(E',d')$ est continue, alors l'image par f d'une partie connexe est connexe. En particulier, $f(E)$ est connexe.
- Cexe à la réciproque : $x\to x^2$
- App : il n'existe pas d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
- Pro : Si une partie B de E vérifie $A\subset B\subset\overline{A}$, alors B est connexe.
- Pro : les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Pro : Soit une famille de sous-ensembles connexes A_i dont l'intersection est non vide. Alors $\cap_i A_i$ est connexe.

4. *Composantes connexes.* — :

- Def : On définit une "composante connexe" comme étant la réunion de tous les connexes contenant un élément donné.
- Pro : E est partitionné/segmenté par ses composantes connexes. On a donc une relation d'équivalence déduite de l'appartenance à une même composante connexe.
- Exe : dans $\mathbb{N}$ et plus généralement dans un espace muni de la topologie discrète, les composantes connexes sont les singletons.
- Def : si on note C_x la composante connexe contenant un élément x, $\{x\}\subset C_x$. En cas d'égalité, cela signifie que $\{x\}$ est le seul sous-ensemble connexe de E contenant x mais pas forcément que x est un point isolé. Si $\forall x\in E, C_x\{x\}$, on dit que E est totalement discontinu.(exemple : $\mathbb{Q}$). Si au contraire, on a $C_x=E$, E est connexe.

- Exe : Dans $\mathbb{Q}$ aucun point n'est isolé, mais les composantes connexes sont aussi les singletons : on parle d'espaces totalement discontinus ;
- Pro : Les composantes connexes sont toujours fermées.
- Pro : toute partie connexe non vide qui est à la fois fermée et ouverte est une composante connexe.
- Déf : Une application $f : X \to Y$ est dite localement constante (en) sur X si tout point de X possède un voisinage sur lequel f est constante.

  Une fonction localement constante sur X n'est pas forcément constante sur X, mais c'est le cas si l'espace X est connexe, comme le montre le théorème suivant.

  Théorème — Si f est localement constante sur X alors elle est constante sur chaque co

5. *Connexité par arcs.* —

- Def : connexe par arcs (existence d'un chemin).
- The : Si une partie (resp. ensemble) est connexe par arcs, alors elle (resp. il) est connexe.
- Cexe : $\{\frac{sinx}{x} tqx \in]0,1]\} \cup \{0\}$
- Exe : démonstration plus simple du fait que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est connexe.
- Pro : il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes sont appelées "composantes connexes par arc".
- App : Problème des 3 maisons.
- Def : On peut introduire de nouvelles notions en contraignant les arcs ou chemins. Par exemple des segments raboutés ou lignes brisées.
- Pro : dans un espace vectoriel normé, la connexité simple, la connexité par arcs et la connexité par lignes brisées donne les mêmes classes d'équivalence. De même, l'image par une application linéaire continue préserve la connexité par arcs (ou lignes brisées).
- Pro : Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n possède deux composantes connexes, données par le signe du déterminant ;
- Pro : Convexe $\Rightarrow$ Etoilé $\Rightarrow$ Connexe par arcs $\Rightarrow$ Connexe

3. Vrac à reprendre : Analyse réelle. —

- App : théorème de la valeur intermédiaire.
- Pro : Darboux
- Pro : Unicité globale de Cauchy-Lipschitz
- Pro : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ p-différentiable de différentielle nulle en tout point de U. Alors f est constante sur chaque composante connexe de U.

4. Vrac à reprendre : Analyse complexe. —

- Déf Fonctions holomorphes
- Déf Indice
- Théo La fonction Ind est une fonction à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω . (Ω est le plan complexe privé du support du chemin.)
- Théo (Développement 2) Théorème du point fixe de Brouwer
- Théo Formule de Cauchy
- Théo Principe des zéros isolés
- Théo Principe du prolongement analytique
- Théo Théorème des résidus

Développement 1 : ***Théorème de Jordan C1***

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application L-périodique C1, injective sur $]0, L]$, telle que $g(0) = 0$, $g^{'(0)=1}$, et $|g^{'(t)|=1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma = g(\mathbb{R})$.

Alors $\mathbb{C} - \Gamma$ a deux composantes connexes (extérieur et intérieur, fini et infini). **Développement 2 :** ***Connexité de l'ensemble de Julia*** Soit $P \in C[X[$ de degré ≥ 2.

Soit $KP = \{z \in \mathbb{C} : (P^n(z))n \in N, borné\}$ Alors KP est non vide, compact et $C - KP$ est connexe par arcs. (source : FG 3) **Développement 3 :** ***Th. du Point Fixe de Brouwer*** On note B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue $B^n \to B^n$ admet un point fixe. **Développement 4 :** ***Surjectivité de l'exponentielle de matrices***

.

Sources :

- *Xavier Gourdon. Les maths en tête Analyse . Ellipses, 2008.*
- *Bertrand Hauchecorne. Les contre-exemples en mathématiques . Ellipses, 2007. [5] Walter Rudin. Analyse réelle et complexe . Dunod, 2009.*

December 6, 2017

Bruno Nitrosso, EPP et indépendant