Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

On s'intéresse principalement à l'approximation des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$. On évoquera sporadiquement le cas des fonctions multivariées.

1. Approximation des fonctions régulières par des polynômes.

1.1. Approximation locale.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(a,b)^2 \in U$ tels que $[a,b] \subseteq U$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une application.

Proposition 1. (Formule de Taylor reste intégral) Si f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}(U,\mathbb{R}^m)$, on a :

$$f(b) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(a) + (k+1)\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha f((1-t)a+tb)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2. (Levée d'indétermination) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Exemple 3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \exp(tx)\,\mathrm{d}x.$$

Application 4. Le réel e est irrationnel.

Application 5. (Développement en série entière) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-r,r[, |f^{(n)}(x)| \leqslant M,$$

alors f est égale à sa série de Taylor sur $]-r,r[$.

Application 6. (Lemme d'Hadamard) Si f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}(U,\mathbb{R})$ et si $f(a)=0$, alors il existe $g_1,\cdots,g_n\colon U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k(U,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x).$$

Exemple 7. La valeur principale de $1/x$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Application 8. (Nature des points critiques) Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U, si a est un point critique de f et si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

- Si $\mathrm{d}^2{}_a f$ est définie positive, alors a est un minimum local.
- Si $\mathrm{d}^2{}_a f$ est définie négative, alors a est un maximum local de f.
- Si $\mathrm{d}^2{}_a f$ est non dégénérée et n'est pas définie, alors a est un point selle de f.

1.2. Approximation uniforme.

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une application.

Définition 9. On définit le n-ième polynôme de Bernstein associé à f par :

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Proposition 10. Si f est continue, alors $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Théorème 11. (de Stone-Weierstrass) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, toute fonction continue sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes à n variables.

Application 12. Si f est continue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Application 13. (Une version faible du théorème de Müntz-Szász) Soit $(\lambda_n) \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$, alors toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est une limite uniforme de combinaisons linéaires d'élements de $\{x \mapsto x^{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x \mapsto 1\}$.

2. Interpolation polynomiale et intégration numérique.

Soient $[a,b]$ un intervalle réel non vide et non réduit à un point et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application.

2.1. Interpolation lagrangienne.

Définition 14. Soit $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le i-ième polynôme élémentaire interpolateur de Lagrange aux points $x_0, \cdots, x_n$ par $\ell_i := \displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$.

Définition-Proposition 15. Il existe un unique polynôme $p_n(f)$ de degré au plus n tel que pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on ait $p_n(x_j) = f(x_j)$. C'est le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $x_0, \cdots, x_n$; on a $p_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i$.

Théorème 16. Si f est $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]\min(x, x_0, \cdots, x_n), \max(x, x_0, \cdots, x_n)[$ tel que :

$$f(x) - p_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Exemple 17. Soient $[a,b] = [-1,1]$, $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i := -1 + i\dfrac{2}{n}$. Bien que f soit analytique sur $]-1,1[$, $(p_n(f))_n$ ne converge pas simplement vers f sur $[-1,1]$.

Proposition 18. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]a,b[$ et si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i := a + i\dfrac{b-a}{n}$, alors, on a l'inégalité suivante :

$$\|f - p_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)n^{n+1}}.$$

Exemple 19. Soient $[a,b] = [-1,1]$, $f : x \mapsto \sin(x)$ et quel que soit $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i := -1 + i\dfrac{2}{n}$, alors $(p_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$.

2.2. Méthode de Newton-Cotes.

On suppose que f est continue sur $[a,b]$. Soient $p \in \mathbb{N}$ et quel que soit $i \in [\![0,p]\!]$, $x_i := a + i\dfrac{b-a}{p}$.

Définition 20. Quel que soit $i \in [\![0,p]\!]$, on pose :

$$\omega_{p,i} := \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_i}{x_j - x_i} \right) \mathrm{d}t.$$

La p-ième méthode de Newton-Cotes consiste en l'approximation :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{p} \omega_{p,i} f(x_i).$$

Proposition 21. Si f et de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur $]a,b[$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{p} \omega_{p,i} f(x_i) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{p+2} \|f^{(p+1)}\|_\infty}{(p+1)p^{p+1}}.$$

La p-ième méthode de Newton-Cotes est exacte pour les polynômes de degré au plus p.

Corollaire 22. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $x_{i,j} := x_i + j\dfrac{x_{i+1} - x_i}{n}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur $]a,b[$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p} \omega_{p,j} f(x_{i,j}) \right| = o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

3. Approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques.

Soient $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $L^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ et de carré intégrable muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme hermitienne associée. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de $L^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$.

3.1. Propriétés hilbertiennes des séries de Fourier.

Définition 23. Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) := \langle f, e^{in\cdot} \rangle$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\cdot}.$$

Proposition 24. (Inégalité de Bessel) Quel que soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2{}^2.$$

Proposition 25. (Égalité de Parseval) On a l'égalité suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2{}^2.$$

Théorème 26. La suite $(S_N(f))_N$ converge en moyenne quadratique vers f.

Corollaire 27. L'ensemble $\{e^{in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

3.2. Convergence ponctuelle.

Théorème 28. (de Dirichlet) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
- f admet une limite à gauche (resp. à droite) de x_0, notée $f({x_0}^-)$ (resp. $f({x_0}^+)$).
- $t \mapsto \dfrac{f(x_0 - t) - f({x_0}^-)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{f(x_0 + t) - f({x_0}^+)}{t}$ sont intégrables au voisinage de 0.

Alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\dfrac{f({x_0}^-) + f({x_0}^+)}{2}$.

Application 29. On a les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Application 30. Quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi}.$$

3.3. **Convergence uniforme.**

Théorème 31. (de Fejér) Si f est continue, alors les moyennes de Césaro de $(S_N(f))_N$ convergent uniformément vers f.

Corollaire 32. Toute fonction continue 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Application 33. (Critère de Weyl) Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0, 1]$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ avec $a \leqslant b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#\{k \in [\![1, n]\!] \text{ t.q. } u_k \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$
- Quel que soit $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(u_k).$$
- Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi u_k} = 0.$$

Exemple 34. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors $(\{n\theta\})_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Théorème 35. Si f est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 36. (Équation de la chaleur unidimensionnelle) Soit $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. L'équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites de Dirichlet suivante :

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; f(0, \cdot) = f_0\right\}$$

admet une unique solution $f\colon [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, de classe $\mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et telle que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(t, \cdot)$ soit 2π-périodique .

Autres développements possibles

Application 32. (Critère de Weyl)
Application 35. (Équation de la chaleur unidimensionnelle)

Références

[1] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.*

[2] X. Gourdon. *Analyse.*

[3] S. Francinou ; H. Gianella ; S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 2.*

[4] S. Francinou ; H. Gianella ; S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4.*

[5] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*