Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien de dimension finie.

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n muni d'un produit scalaire que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.

1. Présentation des protagonistes, premières propriétés

1.1. Notion d'endomorphisme adjoint.

Définition-Proposition 1. Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique $v \in \mathrm{End}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

v est noté u^* et est appelé endomorphisme adjoint de u.

Proposition 2. Soient $(u, v) \in \mathrm{End}(E)^2$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

- ${\mathrm{id}_E}^* = \mathrm{id}_E$.
- (involutivité) $(u^*)^* = u$.
- (linéarité) $(u + \mu v)^* = u^* + \mu v^*$.
- (anti-commutativité) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Corollaire 3. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$, u est inversible si et seulement si u^* est inversible. Le cas échéant, on a $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Proposition 4. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$, on a $\ker(u) = \mathrm{im}(u^*)^\perp$ et $\ker(u^*) = \mathrm{im}(u)^\perp$.

Remarque 5. En particulier, on a $\mathrm{im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.

Corollaire 6. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$, u et u^* ont même rang.

Proposition 7. Soient F un sous-espace vectoriel de E et soit $u \in \mathrm{End}(E)$, u stabilise F si et seulement si u^* stabilise $F^\perp$.

Proposition 8. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, on a $\mathrm{mat}(u^*, \mathscr{B}) = {}^\intercal\mathrm{mat}(u, \mathscr{B})$.

Contre-exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne standard, $\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et u la projection sur $\{y = 0\}$ parallèlement à $\{x = 0\}$. On a :

$$\mathrm{mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{mat}(u^*, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Notion d'endomorphisme normal, exemples remarquables.

Définition 10. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$, u est normal si et seulement si u commute à u^*.

Remarque 11. Si $u, v \in \mathrm{End}(E)$ sont normaux, $u + v$ et $u \circ v$ ne sont en général pas normaux, c'est néanmoins le cas si u commute à v^* ou de manière équivalente si u^* commute à v.

Proposition 12. Quels que soient $u \in \mathrm{End}(E)$ normal et $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Définition 13. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

- u est symétrique (ou auto-adjoint) si et seulement si $u^* = u$. On note $\mathrm{S}(E)$ leur ensemble.
- u est antisymétrique si et seulement si $u^* = -u$. On note $\mathrm{A}(E)$ leur ensemble.
- u est orthogonal si et seulement si $uu^* = \mathrm{id}_E$. On note $\mathrm{O}(E)$ leur ensemble.
- u est une rotation si et seulement si $u \in \mathrm{O}(E)$ et $\det(u) = 1$. On note $\mathrm{SO(E)}$ leur ensemble.

Remarque 14. Il s'agit d'exemples d'endomorphismes normaux.

Exemple 15. Les symétries orthogonales et les projections orthogonales de E sont des endomorphismes symétriques.

Proposition 16. Soit $u \in \mathrm{S}(E)$.

- u est positif si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$. Soit $\mathrm{S}^+(E)$ leur ensemble.
- u est défini positif si et seulement si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$. Soit $\mathrm{S}^{++}(E)$ leur ensemble.

Remarque 17. On n'a pas de structure algébrique sur $\mathrm{S}^+(E)$ et $\mathrm{S}^{++}(E)$. Il s'agit cependant de cônes positifs convexes et ainsi d'espaces topologiques contractiles.

Exemple 18. Quel que soit $u \in \mathrm{End}(E)$, $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont symétriques positifs. Si on suppose de plus que $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont symétriques définis positifs.

Proposition 19. Les ensembles $\mathrm{S}(E)$ et $\mathrm{A}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{End}(E)$ en somme directe dans $\mathrm{End}(E)$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque 20. Si $u, v \in \mathrm{S}(E)$, $u \circ v$ n'est en général pas symétrique, c'est néamoins le cas si u et v commutent.

Proposition 21. Les ensembles $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO(E)}$ sont des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 22. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est orthogonal.
- u préserve le produit scalaire *i.e.* pour tout $(x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
- u préserve la norme *i.e.* pour tout $x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- Il existe une base orthonormale de E telle que son image par u soit une base orthonormale.
- L'image par u de toute base orthonormale de E est une base orthonormale.

Proposition 23. Soient $u \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, u stabilise F si et seulement si u stabilise $F^\perp$.

2. Réduction des endomorphismes normaux, décomposition des endomorphismes

2.1. Réduction des endomorphismes normaux, applications.

Théorème 24. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ normal, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{mat}(u, \mathscr{B}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, A_1, \cdots, A_s),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et A_j est antisymétrique réelle de taille 2.

Corollaire 25. (Théorème spectral) Soit $u \in \mathrm{S}(E)$, u est diagonalisable en base orthonormée.

Application 26. Soit $u \in \mathrm{S}^{++}(E)$, il existe un unique $v \in \mathrm{S}^{++}(E)$ tel que $u = v \circ v$.

Remarque 27. Le résultat précédent reste vrai en remplaçant $\mathrm{S}^{++}(E)$ par $\mathrm{S}^+(E)$.

Corollaire 28. Soit $u \in \mathrm{A}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{mat}(u, \mathscr{B}) = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, A_1, \cdots, A_s),$$

où A_j est antisymétrique réelle de taille 2.

Corollaire 29. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{mat}(u, \mathscr{B}) = \mathrm{diag}(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, \cdots, R_{\theta_r}),$$

où l'on a posé $R_{\theta_j} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$, avec $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Remarque 30. Si $u \in \mathrm{SO(E)}$, alors q est pair.

Application 31. L'exponentielle réalise une surjection continue de $\mathrm{A}(E)$ sur $\mathrm{SO(E)}$. Si $n \geqslant 2$, l'application $\exp : \mathrm{A}(E) \twoheadrightarrow \mathrm{SO(E)}$ n'est pas injective ; en effet, on a :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}\right).$$

2.2. **Décomposition des endomorphismes, applications.**

Proposition 32. (Décomposition polaire) L'application suivante est un homéomorphisme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(E)\times \mathrm{S}^{++}(E) & \to & \mathrm{GL}(E) \\ (u,v) & \mapsto & u\circ v \end{array}\right. .$$

Remarque 33. Si $f \in \mathrm{End}(E)$, il existe $(u,v) \in \mathrm{O}(E)\times \mathrm{S}^{+}(E)$ tel que $f = u\circ v$, mais le couple (u,v) n'est plus unique.

Application 34. L'espace topologique $\mathrm{GL}(E)$ se rétracte par déformation sur $\mathrm{O}(E)$.

Proposition 35. (Décomposition QR) Soit $\mathscr{B}$ une base de E, on note $T_{\mathscr{B}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E dont les matrices sont triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs dans $\mathscr{B}$. L'application suivante est un homéomorphisme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(E)\times T_{\mathscr{B}}(E) & \to & \mathrm{GL}(E) \\ (u,v) & \mapsto & u\circ v \end{array}\right. .$$

Remarque 36. On peut retrouver le résultat de l'application 34 avec la proposition 35.

Application 37. (Inégalité d'Hadamard) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\det(M)| \leqslant \|C_1\|_2 \cdots \|C_n\|_2$, où les C_i sont les colonnes de M et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.

3. Étude plus approfondie du groupe orthogonal

3.1. **Du point de vue topologique.**

Proposition 38. L'espace topologique SO(E) est connexe par arcs.

Remarque 39. En particulier, $\mathrm{O}(E)$ a deux composantes connexes homéomorphes, il s'agit de SO(E) et $\mathrm{O}(E)\setminus \mathrm{SO(E)}$. Ainsi, en vertu de l'application 34, $\mathrm{GL}(E)$ a également deux composantes connexes, il s'agit de $\mathrm{GL}^+(E)$ et $\mathrm{GL}(E)\setminus \mathrm{GL}^+(E)$.

Proposition 40. L'espace topologique $\mathrm{O}(E)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dont l'espace tangent en l'identité est $\mathrm{A}(E)$.

Proposition 41. L'espace topologique SO(E) est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dont l'espace tangent en l'identité est $\mathrm{A}(E)$.

3.2. **Du point de vue algébrique.**

Proposition 42. Le centre de $\mathrm{O}(E)$ est $\{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

Remarque 43. Le groupe $\mathrm{O}(E)$ n'est jamais simple. Si n est pair, alors SO(E) n'est pas simple.

Définition 44. Une réflexion orthogonale de E est une symétrie orthogonale de E parallèlement à un hyperplan vectoriel de E.

Proposition 45. Si $u \in \mathrm{O}(E)$, u est le produit d'au plus $n - \dim(F_u)$ réflexions orthogonales, où F_u est l'ensemble des points fixes de u.

Corollaire 46. Le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Définition 47. Un renversement orthogonal de E est une symétrie orthogonale de E parallèlement à un sous-espace vectoriel de codimension 2 de E.

Corollaire 48. Si $n \geqslant 3$, le groupe SO(E) est engendré par les renversements orthogonaux.

Application 49. Si $n = 3$, alors SO(E) est simple.

Autres développements possibles

Théorème 24.

Théorème 50. L'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(E)$ est la boule unité de $\mathrm{End}(E)$ pour la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|$.

Théorème 51. Un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

Références

[1] M. Audin. *Géométrie.*

[2] P. Caldero ; J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome 1.*

[3] X. Gourdon. *Algèbre.*

[4] D. Perrin. *Cours d'algèbre.*

[5] R.Mneimné ; F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.*