**Leçon 152 - Déterminant. Exemples et applications.**

Cadre : E est un K-ev de dimension finie n. $B = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E.

## 1. Définitions du déterminant. —

### 1. *Déterminant d'une famille de vecteurs.* —

- Def : pour $k \geq 1$, une forme k-linéaire sur E est une application $f : E^k \to K$ qui est linéaire en chaque variable. On note $L_k(E, K)$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires sur E.
- Def : Une forme k-linéaire f est dite antisymétrique si :
  $\forall i < j \leq k$, $f(x_1, .., x_j, .., x_i, .., x_k) = -f(x_1, .., x_i, .., x_j, .., x_k)$.
- Rem : f est antisymétrique ssi $\forall \sigma \in \Sigma_k$, $f(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, .., x_k)$.
- Def : Une forme k-linéaire est dite alternée si $(x_i = x_j$ pour $i \neq j$ $) \Rightarrow f(x_1, .., x_k) = 0$.
- Pro : Si $car(K) \neq 2$, f est antisymétrique ssi f est alternée.
- Def+Pro : $det_B(x_1, .., x_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)}..x_{n,\sigma(n)}$ est une forme n-linéaire alternée qui vaut 1 pour $(x_1, .., x_n) = (e_1, .., e_n)$
- Pro : L'ensemble des formes n-linéaires alternées forme un sous-espace vectoriel de $L_n(E)$ de dimension 1.
- Rem : Si $B' = \{e'_1, .., e'_n\}$ est une autre base de E, alors $det_{B'}(.) = det(B, B') det_B(.)$, où $det(B, B') = det_B(e'_1, .., e'_n)$.
  On a alors $det(B, B') det(B', B) = 1$.
- Pro : Une famille $(x_1, .., x_n)$ est liée ssi $det_B(x_1, .., x_n) = 0$.
- Ex : Pour $u \in End(E)$, $f_u(x_1, .., x_n) := \sum_i det_B(x_1, .., u(x_i), .., x_n)$ est une forme n-linéaire alternée. On note $Tr(u)$ le scalaire tel que $f_u = Tr(u) det_B$.

### 2. *Déterminant d'un endomorphisme.* —

- Def+Pro : Pour $f \in End(E)$, on définit $det(f) := det_B(f(e_1), .., f(e_n))$ le déterminant de f.
  $det(f)$ est indépendant de la base B choisie.
- Pro : $det(f \circ g) = det(f) det(g)$.
- Ex : $det(Id_E) = 1$, $det(\lambda Id_E) = \lambda^n$.
- Pro : $f \in GL(E) \Leftrightarrow (f(e_1), ..., f(e_n))$ base de E $\Leftrightarrow det(f) \neq 0$.
- Pro : Pour $f \in GL(E)$, $det(f^{-1}) = det(f)^{-1}$.
- Pro+Def : $det : GL(E) \to K^*$ est un morphisme de groupes.
  On définit $SL(E) := det^{-1}(\{1\})$. C'est un s-g distingué de $GL(E)$, avec $GL(E)/SL(E) \cong K^*$.

### 3. *Déterminant d'une matrice.* —

- Def : Pour $A \in M_n(K)$, on définit $det(A)$ par $det(A) := det(f)$, où $f \in End(K^n)$ est l'unique application linéaire telle que $Mat(f, B) = A$.
- Pro : $A \in Gl_n(K) \Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
- Pro : $det(A) = det_{B'}(c_1, .., c_n)$ où $c_i$ sont les colonnes de A et B' est la base canonique de $K^n$.
  On a alors : $det_{B'}(\lambda_1.c_1, .., \lambda_n.c_n) = \lambda_1..\lambda_n det(A)$, $\forall \lambda_i \in K$.
- Pro : On a : $det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)}..x_{n,\sigma(n)}$
- Ex : Pour $A = Diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$, $det(A) = \lambda_1..\lambda_n$.
- Cor : $det(A^t) = det(A)$. Ainsi, $det(A) = det_{B'}(l_1, .., l_n)$ où $l_i$ sont les lignes de A et B' la base canonique de $K^n$.
- Pro : $\forall A, C \in M_n(K)$, $det(AC) = det(A) det(C)$.
- Cor : Deux matrices semblables ont le même déterminant.

## 2. Calculs de déterminants. —

### 1. *Déterminants triangulaires par blocs.* —

- Pro : Pour $A \in M_n(K)$,$C \in M_{n,m}(K)$,$D \in M_m(K)$, $det(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}) = det(A) det(D)$.
- Cor : Si A est une matrice triangulaire supérieure/inférieure, alors $det(A) = a_{1,1}..a_{n,n}$.
- Pro : Le déterminant est invariant par opérations élémentaires sur les lignes/colonnes.
- Pro : Une permutation des lignes/colonnes multiplie le déterminant par la signature de la permutation.
- App : On peut ainsi utiliser la méthode du Pivot de Gauss sur A pour calculer $det(A)$.
  Cette méthode nécessite $O(n^3)$ opérations dans K.

### 2. *Mineurs et cofacteurs.* —

- Def : Pour tout $(i, j)$ on appelle mineur de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.
  On appelle cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j} := (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.
- Pro : Développement par rapport à la i-ième ligne : $\sum_j a_{i,j} A_{i,j} = det(A)$.
  Développement par rapport à la j-ième colonne : $\sum_i a_{i,j} A_{i,j} = det(A)$.
- Def : On définit $com(A) := (A_{i,j})_{i,j}$ la matrice des cofacteurs de A, appellée comatrice de A.
- Pro : Pour tout $A \in M_n(K)$, $A^t com(A) = com(A)^t A = (det(A)).I_n$.
- Cor : Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com(A)^t$.
- Exemple pour $n = 2$.
- App : Ainsi, les matrices de $M_2(\mathbb{Q})$ à coefficients entiers d'inverse à coefficients entiers sont celles de déterminant $\pm 1$.

### 3. *Déterminants particuliers.* —

- Ex : Déterminant de Vandermonde : $V(a_1, .., a_n) = \Pi_{i<j}(a_j - a_i)$.
- Application au calcul du déterminant d'une famille étagée de polynômes.
- Exemples de calculs de det du Gourdon.
- Ex : Déterminant circulant.
- Ex : Déterminant de Cauchy.

## 3. Applications en algèbre et géométrie. —

*1. Systèmes de Cramer.* —

- Def : Système de Cramer.
- Théorème de Cramer.
- Exemple.

*2. Polynôme caractéristique.* —

- Rem+Def : Comme le déterminant d'une matrice comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de la matrice, pour H un anneau commutatif unitaire intègre de corps des fractions K, pour tout $M \in M_n(K)$ à coefficients dans A, $det(M) \in H$. Ainsi, pour tout $A \in M_n(K)$, le déterminant de la matrice $A - XI_n \in M_n(K(X))$ est un élément de $K[X]$. On note alors $\chi_A(X) := det(A - XI_n)$.
- Pro : $\lambda \in Sp_K(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.
- Pro : Pour $\lambda$ une v.p. de A, et $v_\lambda$ la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans $\chi_A(X)$, on a : $1 \leq dim(Ker(A - \lambda I_n)) \leq v_\lambda$.
- Théorème de Hamilton-Cayley : $\chi_A(A) = 0$.
- Ex : Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Rem : Le coefficient constant de $\chi_A$ est $det(A)$. Tous les coefficients de $\chi_A$ sont des polynômes à coefficients entiers en les coefficients de A.
- App : Pour H un anneau commutatif unitaire intègre de corps de fractions K, et pour $M \in M_n(K)$ à coefficients dans H, M admet un inverse à coefficients dans H ssi $det(M) \in H^\times$.

*3. Détermination du nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme.* —

- Rem : Soient $l_1, .., l_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Si la famille des $l_i$ est linéairement indépendante, alors une forme quadratique de la forme $q(x) = \sum_i a_i(l_i(x))^2$ va s'écrire de la forme $q((y_1, .., y_n)) = \sum_i a_i y_i^2$ dans une base B complétant la famille antéduale associée à la famille $(l_1, .., l_r)$.
- **Dev** : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et de racines complexes $\lambda_1, \dot{,} \lambda_r$, de multiplicités $\alpha_1, \dot{,} \alpha_r$.
  On pose $s_l := \sum_{i \geq r} \alpha_i \lambda_i^l$ pour $l \geq 0$, et $S_n((x_1, \dot{,} x_n)) := \sum_{i,k \leq n} s_{i+k} x_i.x_k$, qui est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
  Si $(p, q)$ est la signature de $S_n$, alors P possède $p + q$ racines distinctes, dont $p - q$ exactement sont réelles.
- Exemple pour $P(X) = aX^2 + bX + c$.

*4. Géométrie.* —

- Def : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel d'espace de vecteurs E, et $(B_0, .., B_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$.
  Une conique de l'espace affine $\mathscr{E}$ est un ensemble de points $M \in \mathscr{E}$ dont les coordonnées barycentriques $(x_0, .., x_n)$ $(x_0 + .. + x_n \neq 0)$ vérifient : $(x_0, .., x_n).A.(x_0, .., x_n)^t = 0$, pour A une matrice symétrique.
- Pro : Par 5 points du plan affine passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.
- **Dev :** (Corollaire du théorème de Pascal) Soient A,B,C trois points du plan non-alignés. Soient M,N des points du plan tels que les droites (AM),(BM),(CM), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points $M_A$,$M_B$,$M_C$ et que les droites (AN),(BN),(CN), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points $N_A$,$N_B$,$N_C$.
  Alors il existe une conique passant par $M_A$,$M_B$,$M_C$,$N_A$,$N_B$,$N_C$.

## 4. Applications en analyse. —

*1. Régularité du déterminant.* —

- Pro : Le déterminant est polynômial en les coefficients d'une matrice, donc est de classe $C^\infty$.
- Pro : $D_A(det)(H) = Tr(com(A)^t H)$.
- Pro : Deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.
- Pro : L'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $C_n(\mathbb{C})$.

*2. Changement de variables.* —

- Def : Jacobien
- Ex : Coordonnées polaires.
- Pro : Théorème de changement de variables.
- Exemple de calcul via changement de variables.

**Références**


Gourdon : Forme k-linéaire, alternée, antisymétrique, propriétés, formes n-linéaires, $det_B$, cns pour qu'une famille soit liée, propriétés, exemples. Det d'un endomorphisme, morphisme de groupes, $SL(E)$, exemples. Det d'une matrice, det des lignes, det des colonnes, invariance par similitude, exemple. Déterminant triangulaire par bloc, invariance par opérations élémentaires, permutation de lignes/colonnes, pivot de Gauss. Mineurs, cofacteurs, comatrice, propriété, exemple en dim 2. Det de Vandermonde, Det de Cauchy, Det circulant, exemples. Système de Cramer. Polynôme caractéristique, propriétés, poly d'une matrice compagnon, Th de Hamilton-Cayley.
Gourdon (Analyse) : Différentielle de det. Jacobien, Th de changement de variables.
Gantmacher (Tome 2) : Détermination du nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme.(Dev)
Eiden : Conique en coordonnées barycentriques, Corollaire du théorème de Pascal.(Dev)


---


*June 7, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*