Leçon 155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre : E est un K-ev de dimension finie n.

1. Définitions et premières propriétés. —

1. *Eléments propres.* —

- Def : Valeur propre λ d'un endomorphisme E.
- Def : Espace propre associé à λ. Ses éléments non-nuls sont appelés vecteurs propres.
- Def : $Sp_K(f)$ le spectre de f.
- Pro : Les espaces propres sont en somme directe. On en a un nombre fini.
- Pro : Les espaces propres sont les plus grands s-ev sur lesquels $f \in End(E)$ est une homothétie.
- Ex : Pour p un projecteur, ses valeurs propres sont 1 et 0.
- Ex : Pour r une rotation dans $\mathbb{R}^2$, r n'a pas de valeurs propres.
- Def : $f \in End(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

2. *Polynômes d'endomorphismes, idéal annulateur, polynôme minimal.* —

- Def+Pro : Pour $f \in End(E)$, $P \in K[X] \mapsto P(f) \in End(E)$ est un morphisme d'anneaux.
- Pro : Le noyau de ce morphisme est un idéal appelé idéal annulateur.
- Pro+Def : Il existe un unique polynôme unitaire qui engendre cet idéal, et on l'appelle polynôme minimal μ_f de f.
- Rem : Ainsi $P(f) = 0 \Leftarrow \mu_f | P$.
- Ex : Pour p un projecteur, on a $\mu_p = X(X-1)$
- Ex : Pour s une involution non-triviale et $car(K) \neq 2$, on a $\mu_s = (X+1)(X-1)$
- Ex : Pour N nilpotent d'indice r, on a $\mu_N = X^r$.
- Pro : μ_f est invariant par similitude.
- Rem : Pour tout $P \in K[X]$, $Ker(P(f))$ et $Im(P(f))$ sont f-stables.
- Lemme des noyaux : Soit $P = P_1..P_r$ avec P_i premiers entre eux.
  Alors $Ker(P(f)) = \oplus_i Ker(P_i(f))$.
- Pro : $Sp_K(f)$ est l'ensemble des racines de μ_f sur K.
- Pro : Si K est algébriquement clos, alors μ_f est scindé, et $Sp_K(f)$ est non-vide.

3. *Polynôme caractéristique.* —

- Def : $Pour A \in M_n(\mathbb{R})$ on définit $\chi_A(X) := det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A.
- Rem : C'est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$.
- Pro+Def : Le polynôme caractéristique est invariant par similitude. On peut ainsi définir de façon unique χ_f par $\chi_{Mat(f,B)}$ pour B une base de E.
- Théorème de Hamilton-Cayley : $\chi_f(f) = 0$, càd $\chi_f | \mu_f$.
- Cor : $deg(\mu_f) \leq n$.
- Pro : Les racines de χ_f dans K sont exactement $Sp_K(f)$.
- Pro : Soit $\lambda \in Sp_K(f)$. Alors pour n_λ la multiplicité de $(X-\lambda)$ dans χ_f, on a : $1 \leq dim(Ker(f - \lambda I_n)) \leq n_\lambda$.
- Ex : Si N est nilpotent, $\chi_N = X^n$.
- Ex : Si p est un projecteur de rang r, $\chi_p = X^{n-r}(X-1)^r$.
- Ex : Si f est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_n$ comptées avec multiplicités, alors $\chi_f = (X-\lambda_1)..(X-\lambda_n)$.

2. Diagonalisabilité. —

1. *Critères de diagonalisabilité.* —

- Thm : On a les équivalences :
  i) Il existe une base B dans laquelle $Mat(f, B)$ est diagonale.
  ii) μ_f est scindé à racines simples dans K.
  iii) χ_f est scindé dans K et $dim(Ker(f - \lambda Id)) = v_\lambda$ pour tout λ racine de χ_f.
  iv) Il existe un polynôme scindé à racines simples dans K qui annule f.
  v) $E = \oplus_{\lambda \in Sp_K(f)} Ker(f - \lambda Id)$
- Ex : Les projecteurs et les symétries sont toujours diagonalisables (sauf si $car(K) = 2$)
- Ex : Les endomorphismes nilpotents non-nuls ne sont jamais diagonalisables.
- Rem : Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.
- Ex : Les matrices de rotations de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$ mais le sont dans $M_2(\mathbb{C})$

2. *Diagonalisation simultanée.* —

- Pro : Si u et v commutent alors $Im(u)$ et $Ker(u - \lambda Id)$ sont v-stables.
- Thm : Soit $(u_i)_i$ une famille quelconque d'endomorphismes diagonalisables qui commutent.
  Alors il existe une base B de E dans laquelle toutes les $Mat(u_i, B)$ sont diagonales.
- App : Un sous-groupe abélien G de matrices diagonalisables de$Gl_n(K)$ est semblable à un sous-groupe de matrices diagonales.
- App :Soit K tel que $car(K) \neq 2$. Alors $Gl_n(K) \simeq Gl_m(K)$ ssi $m = n$.

3. *Endomorphismes semi-simples.* —

- Def : $f \in End(E)$ est dit semi-simple ssi tout s-ev F qui est f-stable admet un supplémentaire f-stable.
- Thm : On a l'équivalence :
  i) f est semi-simple.
  ii) μ_f est sans facteurs carrés.
  iii) Il existe une extension de corps L/K telle que μ_f est scindé à racines simples sur L.
  iv) Il existe une extension de corps L/K telle que $Mat(f, B)$ est diagonalisable dans $M_n(L)$.
- Cor : Les endomorphismes semi-simples sont donc une généralisation des endomorphismes diagonalisables.

– Ex : Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi-simples sur $\mathbb{R}$.

4. Liens avec la diagonalisation par blocs. —

– On se place ici sur E euclidien ou hermitien, muni d'un produit scalaire.
– Pro+Def : Pour tout $f \in End(E)$, il existe un unique $f^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $< f(x), y >=< x, f^*(y) >$.
f^* est appelé adjoint de f, et $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $End(E)$.
– Ex : Pour p un projecteur, $p^* = p$.
– Pro : Dans le cas euclidien, $Mat(f^*, B) = Mat(f, B)^t$. Dans le cas hermitien, $Mat(f^*, B) = \overline{Mat(f, B)}^t$.
– Pro : Les endomorphismes f tels que $f = f^*$ sont associés aux matrices symétriques réelles ($M = M^t$) dans le cas euclidien, et aux matrices hermitiennes ($M = \overline{M}^t$) dans le cas hermitien.
– Def : f est un endomorphisme normal ssi $f^*f = ff^*$.
– Ex : Les matrices symétriques réelles, antisymétriques réelles ($M = -M^t$), hermitiennes, orthogonales réelles ($MM^t = I_n$) définissent des endomorphismes normaux.
– Pro : Soit f endomorphisme normal et E_λ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ est f^*-stable et f-stable.
– Théorème de réduction des endomorphismes normaux : Soit f un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle on a :
$Mat(f, B) = Diag(\lambda_1, .., \lambda_r, P_1, .., P_s)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $P_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.
– App : Pour M symétrique réelle/hermitienne, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pour M antisymétrique réelle, les P_j sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}$.
Pour M orthogonale, les P_j sont de la forme $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ avec $a_j^2 + b_j^2 = 1$.
– App : Les matrices antisymétriques réelles, orthogonales sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.
– App : $exp : A_n(\mathbb{R}) \mapsto SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

3. Décomposition de Jordan-Chevalley. —

– Pro : Pour $\chi_f = P_1..P_r \in K[X]$ avec P_i premiers entre eux deux à deux, la projection sur $Ker(P_i(f))$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} Ker(P_j(f))$ est un polynôme en f.
– **Dev** : Décomposition de Jordan-Chevalley : Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f est scindé sur K.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in End(E)^2$ tel que :
i) d est diagonalisable, n est nilpotent.
ii) f = d + n.
iii) n et d commutent.
iv) d et n sont des polynômes en f.
– Algorithme de calcul de d et n par méthode de Newton polynômiale.

4. Applications de la diagonalisation. —

1. Résultats de topologie matricielle. —

– Def : On définit $D_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonalisables, $T_n(K)$ l'ensemble des matrices trigonalisables, et $C_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonalisables à vp distinctes.
– Pro : Alors $\overline{C_n(K)} = T_n(K)$ et $\mathring{D_n}(K) = C_n(K)$
– App : Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $det(exp(M)) = exp(Tr(M))$.
– **Dev** : Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a les propriétés suivantes :
i) La matrice A est nilpotente ssi 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.
ii) La matrice A est diagonalisable ssi la classe de similitude de A est fermée.
– Pro : Pour tout $M \in S_n(\mathbb{R})$, on a : $|||M|||_2 = \rho(M) := max_{Sp(M)}(|\lambda|)$.
– App : Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a : $|||M|||_2 = \sqrt{\rho(MM^t)}$.
– **Dev** : L'exponentielle de matrice $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

2. Résolution de suites récurrentes linéaires. —

– Méthode : Pour A une matrice diagonalisable, avec $A = PDP^{-1}$ et D diagonale, on a $A^k = PD^kP^{-1}$ où $D^k = Diag(\lambda_1^k, .., \lambda_n^k)$.
En connaissant P la matrice de passage de la base canonique de K^n vers une base de vecteurs propres de A, on peut ainsi calculer A^k plus facilement.
– Ex : Dans le cas où $(u_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k, càd définie par $u_0, .., u_{k-1}$ et telle que $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + .. + a_0u_n$ $\forall n \geq 0$, on peut réécrire la relation de récurrence linéaire sous la forme $U_{n+1} = (u_{n+k}, .., u_{n+1}) = M.U_n$ avec M de la forme ().
Le polynôme caractéristique de M est alors $P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - .. - a_0$ et est aussi son polynôme minimal, donc M est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples.
Dans un tel cas, pour $M = PDP^{-1}$, on a alors $U_n = M^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0$, ce qui permet d'exprimer la valeur de u_n en fonction de n.

Références

Gourdon : Valeur propre, vecteur propre, sous-espace stable, ils sont en somme directe, exemple. Idéal annulateur d'un endomorphisme,polynôme minimal, exemples, Ker et Im sont f-stables, lemme des noyaux, lien entre vp et racines de μ_f. Polynôme caractéristique, propriétés, exemple, Th de Hamilton-Cayley. Diagonalisabilité, CNS de diagonalisabilité. Diagonalisation simultanée. Endomorphismes normaux, réduction des endomorphismes normaux, cas de $S_n(\mathbb{R})$,$A_n(\mathbb{R})$,$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ connexe, exemples, exp $A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ surjective. Décomposition de Jordan-Chevalley.(Dev), algorithme, Dunford de $exp(A)$.
Objectif Agrégation : CNS de diagonalisabilité, projecteurs, symétries, cas des corps finis. Contre-ex de diagonalisation simultanée, $Gl_n \simeq Gl_m$ ssi $n = m$. Topologie matricielle, $D_n(\mathbb{C})$, $C_n(\mathbb{C})$, $T_n(\mathbb{C})$, det(exp).
Grifone : Matrice diag dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$. Puissance d'une matrice diag, suites récurrentes linéaires.

FGN (Algèbre 1) : Matrices diagonalisables sur un corps fini, cardinal des orbites. Topologie des classes de similitudes matricielles.(Dev)
Caldero, Germoni : $exp : S_n(\mathbb{R}) \mapsto S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme.(Dev)

June 5, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes