

Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

I) Notion d'extension de corps

1) Premières définitions et propriétés [GOZ]

- Un morphisme de corps est toujours injectif
- Caractéristique d'un corps
- Sous corps premier

2) Extensions de corps [GOZ]

- Définition
- Une extension est un K-ev
- Degré d'une extension, extension finie
- Théorème de la base télescopique

3) Morphismes de corps [GOZ,PERR]

- Définition de $Aut_L(K)$
- α racine $\iff P(\sigma(\alpha))$ est racine de P
- Lemme de prolongement

II) Adjonction de racines

1) Algébricité [PER]

- Élément algébrique et transcendant
- Polynôme minimal
- Equivalences avec $K(\alpha)$ pour un élément algébrique
- Extension algébrique
- Degré d'une extension

2) Corps de rupture [GOZ]

- Existence et unicité
- Construction d'un corps de rupture
- Polynôme qui reste irréductible sur une extension

3) Corps de décomposition [GOZ]

- Existence et unicité
- Exemples dans le [PER]
- Majoration par $\deg(P)!$

III) Extensions particulières

1) Cyclotomie [GOZ]

- Racine n-ième de l'unité
- Polynômes cyclotomiques à coefficients dans $\mathbb{Z}$
- Polynômes cyclotomiques irréductibles sur $\mathbb{Z}$
- Polynôme minimal d'une racine primitive n-ième

2) Corps finis [ULM]

- Morphisme de Frobenius
- Existence et unicité des corps finis
- Algorithme de Berlekamp