

Leçon 236 : Illustrer par des ex. qq méth. de calc. D'intégrales de font. d'une ou plusieurs var

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Can] : *Calcul intégral*, Bernard Candelpergher

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel

I Partie A - Approche numérique [Dem] [Sch]

I.1 Première approche

Déf 1 (Méthode de quadrature élémentaire) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx (\beta - \alpha) \sum_{j=0}^m \omega_j f(\xi_j),$$

où $\xi_j \in [\alpha, \beta]$, $0 \leq j \leq m$ et $\sum \omega_j = 1$.

Déf 2 (Méthode de quadrature composée) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{m_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j}).$$

Déf 3 (Ordre d'une méthode) :

Ex 4 (Méthode du point milieu) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

La méthode est d'ordre 1.

Ex 5 (Méthode des trapèzes) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx (\beta - \alpha) \left[\frac{1}{2} f(\alpha) + \frac{1}{2} f(\beta) \right].$$

La méthode est d'ordre 1.

 **Dév 6 (Quadrature de Gauss) :**

I.2 Étude de l'erreur commise

Déf 7 (Noyau de Peano) :

Ex 8 : Pour $c \neq 1/2$, le noyau de Peano de la méthode des rectangles sur $[0, 1]$ est : $K_c(y) = 1 - y - \mathbb{1}_{[0, c]}(y)$.

Pour $c = 1/2$, le noyau de Peano de la méthode point milieu est : $K_m(y) = y^2/2$ si $y < 1/2$ et $K_m(y) = (1 - y)^2/2$ si $y \geq 1/2$.

Thm 9 (Estimation de l'erreur composée) :

II Partie B - Techniques classiques [Gou][Bri-Pag] [Can]

Prop 10 (Primitives) :

App 11 : Développements en éléments simples et recherche de primitive.

Thm 12 (IPP) :

Ex 13 (Intégrale de Dirichlet) :

App 14 (Intégrale de Wallis) :

Thm 15 (Changement de variable) :

Ex 16 (Coordonnées polaires) :

App 17 : Pour tous $a, b > 0$, $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Thm 18 (Fubini) :

Ex 19 : Dans le Candelpergher.

App 20 (Fonction de Weierstrass) :

III Partie D - Intégrales à paramètres [Can] [Gou]

Thm 21 (Continuité sous l'intégrale) :

Contre-Ex 22 : La fonction $f(x, t) = \frac{1}{x}e^{-(\ln(t/x))^2}$ est continue partiellement, mais $\varphi(x) = \int_0^1 f(x, t)dt$ n'est pas continue en 0.

App 38 (Rouché) :

Ex 39 : Divers exemples dans le Candelpergher.

Thm 23 (Dérivabilité sous l'intégrale) :

Rem 24 : On peut obtenir le même genre de résultat pour de la classe $\mathcal{C}^k$ en ayant un chapeau intégrable pour chacune des dérivées.

Ex 25 : $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est dérivable sur $]0, +[$.

App 26 (Frullani) : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} dt = \ln(x) - \ln(a)$

App 27 (Intégrale de Gauss) :

IV Partie C - Fourier et Cauchy en action[Tau] [Can]

IV.1 Analyse de Fourier

Prop 28 : Si f est continue périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceau, alors sa série de Fourier converge normalement.

 **Dév 29 (Fresnel) :**

IV.2 Formules de Cauchy

Thm 30 (Cauchy étoilé) :

Thm 31 (Formules de Cauchy) :

Ex 32 : Calculer $\int \frac{dz}{z^2+1}$

App 33 (Intégrales de Fresnel) :

IV.3 Théorème des résidus

Déf 34 (Résidu) :

App 35 (Calcul d'un résidu) :

Thm 36 (Théorème des résidus) :

Ex 37 : Calcul de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.