

Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

[Amr] : *Suites et séries*, Mohammed El Amrani

[Amr2] : *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mohammed El Amrani

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Can] : *Calcul intégral*, Bernard Candelpergher

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Hau] : *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel

[131] : *131 développements pour l'oral*, Didier Lesesvre, Pierre Montagnon

I Partie A - Continuité, continuité uniforme [Dan]

I.1 Continuité

■ **Déf 1 (Continuité) :**

■ **Ex 2 :**

■ **Contre-Ex 3 :**

I.2 Continuité et compacité

■ **Déf 4 (Uniforme continuité) :**

■ **Contre-Ex 5 :**

■ **Thm 6 (Heine) :**

II Partie B - Convergence uniforme

II.1 Convergence uniforme [Amr]

■ **Déf 7 (Convergence uniforme) :**

■ **Prop 8 (CVU et CVS) :**

■ **Contre-Ex 9 :** Voir [Hau] (Exo 12.7)

■ **Thm 10 (Dini) :**

■ **Thm 11 (Critère de Cauchy uniforme) :**

II.2 Utilisation dans des dérivations ou des intégrations [Amr] [Hau] [Rou] [Tau]

■ **Thm 12 (CVU et continuité) :**

■ **Contre-Ex 13 :** Voir [Hau].

App 14 (Calcul d'une somme alternée) :

■ **Ex 15 :** Voir [Amr].

■ **Thm 16 (Théorème de la double limite) :**

■ **Contre-Ex 17 :** Voir [Hau]

■ **Thm 18 (CVU et dérivation) :**

■ **Contre-Ex 19 :** Voir [Amr]

■ **Thm 20 (Weierstrass) :**

■ **Thm 21 (CVU et intégration) :**

II.3 Baire et ses conséquences [Li] [Gou]

■ **Thm 22 (Baire) :**

Rem 23 : Autre formulation du théorème de Baire

■ **Thm 24 (Banach-Steinhaus) :**

■ **Thm 25 (Application ouverte) :**

App 26 (Isomorphisme de Banach) :

■ **Thm 27 (Graphe fermé) :**

App 28 : Si E_1 et E_2 sont deux sev fermés supplémentaires, alors ils sont

supplémentaires topologiques.

III Partie C - Intégration [Gou] [Bri-Pag] [Can]

III.1 Théorèmes liés à l'intégrale de Lebesgue [Hau] [Bri-Pag]

Thm 29 (Convergence monotone) :

Ex 30 : Voir [Bri-Pag].

Thm 31 (Fatou) :

Thm 32 (Convergence dominée) :

 **Dév 33 (Fonction de Weierstrass) :**

Ex 34 : Voir [Bri-Pag]

Thm 35 (Fubini) :

Ex 36 (Calcul d'une intégrale) : Voir [Amr] (Exo 4.13 ou 4.14)

III.2 Intégrales à paramètres [Gou] [Bri-Pag] [Can]

Thm 37 (Continuité sous l'intégrale) :

Contre-Ex 38 : La fonction $f(x, t) = \frac{1}{x} e^{-(\ln(t/x))^2}$ est continue partiellement, mais $\varphi(x) = \int f(x, t) dt$ n'est pas continue en 0.

Thm 39 (Dérivabilité sous l'intégrale) :

Rem 40 : On peut obtenir le même genre de résultat pour de la classe $\mathcal{C}^k$ en ayant un chapeau intégrable pour chacune des dérivées.

Ex 41 : $\varphi(x) = \int \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est dérivable sur $]0, +[$.

Contre-Ex 42 : La fonction $f(x, t) = \frac{x^3}{t^2} e^{-(x^2/t)}$ est continue, $t \rightarrow \partial_x f$ et $x \rightarrow \partial_x f$ sont continues et $\varphi(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$ est dérivable en 0, mais $\varphi'(0) = 1 \neq \int \partial_x f(x, t) dt$.

App 43 (Frullani) : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} dt = \ln(x) - \ln(a)$

Thm 44 (Holomorphie sous l'intégrale) :

Ex 45 :

III.3 Analyse de Fourier [Amr2] [Li]

III.4 Un exemple d'intersion en probabilité [131]

 **Dév 46 (Strling) :**