**Leçon 101 - Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**

Cadre : $(G,.)$ est un groupe d'élément neutre e, et X est un ensemble

## 1. Définitions et premières propriétés. —

*1. Actions de groupes. —*

- Def : Une action de groupes à gauche de G sur X est la donnée d'un morphisme $\phi : G \to Bij(X)$. $\phi$ est appelé morphisme structurel de l'action.
  On note $g.x = \phi(g)(x)$, ainsi que $G \curvearrowright X$.
- Ex : $Bij(X)$ opère sur X par $f.x = f(x)$.
- Def : L'action de G sur X est fidèle si $\phi$ est injectif.
  L'action de G sur X est transitive si $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$ tq $y = g.x$.
- Ex : L'action de $Bij(X)$ sur X est fidèle et transitive.
  L'action de $GL(E)$ sur $P(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E est fidèle.
- Def : Soit $x \in X$. On définit le stabilisateur de x : $Stab(x) := \{g \in G \text{ tq } g.x = x\}$, ainsi que l'orbite de x :$Orb(x) := \{g.x\ ,\ g \in G\}$.
- Pro : La relation : $xRy$ ssi $Orb(x) = Orb(y)$ est une relation d'équivalence. Ainsi, les orbites pour l'action de G forment une partition de X.
- Rem : G agit transitivement dans chaque $Orb(x)$.
- Ex : Les orbites de $\mathbb{R}^n$ sous l'action naturelle de $O_n(\mathbb{R})$ sont les sphères de centre l'origine.
- App : Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Ex : Le stabilisateur de $x \in \{1, .., n\}$ sous l'action de $\Sigma_n$ est isomorphe à $\Sigma_{n-1}$.
- Def : On dit que l'action de G sur X est k-transitive ssi pour tous k-uplets $(a_1, .., a_k)$, $(b_1, .., b_k)$, il existe $g \in G$ tq $g.a_i = b_i\ \forall i$.
- Ex : L'action de $\Sigma_n$ sur $\{1, .., n\}$ est n-transitive. L'action de $A_n$ sur $\{1, .., n\}$ est (n-2)-transitive.
- Def : Une action est libre ssi pour tout $g \in G - \{e\}$, $\phi(g)$ est sans points fixes.
- Pro : libre $\Rightarrow$ fidèle.
- Contre-ex : $D_3$ agit fidèlement sur les sommets du triangle équilatéral.

*2. Action d'un groupe fini sur un ensemble fini. —*

- Pro : Soit $G \curvearrowright X$. Pour tout $x \in X$, $\overline{g} \in G/Stab(x) \mapsto g.x \in Orb(x)$ est une bijection.
- Cor : Si G est fini, alors $|Orb(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$.
- Pro : (Formule des classes) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, et soit $X = \bigcup_{i=1}^r Orb(x_i)$ la partition de X en orbites sous l'action de G. On a : $|X| = \sum_{i=1}^r |Orb(x_i)| = \sum_{i=1}^r (G : Stab(x_i)) = \sum_{i=1}^r \frac{|G|}{|Stab(x_i)|}$.
- Def : Pour $A \subset G$ on définit $X^A := \{x \in X \text{ tq } a.x = x\ \forall a \in A\}$.
- Cor : (Formule de Burnside) Le nombre r d'orbites de X sous l'action de G est : $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$.
- Pro : Soit p premier, G un p-groupe, et X un ensemble fini sur lequel G agit. On a alors $|X^G| \equiv |X|\ mod(p)$.
- App : Le centre d'un p-groupe G est non-trivial.
- App : Les groupes de cardinal $p, p^2$ sont toujours abéliens.
- App : Théorème de Cauchy : Soit G un groupe et p premier tq $p||G|$.
  Alors G possède un élément d'ordre p.

## 2. Actions de groupes et théorie des groupes. —

*1. Action par translation. —*

- Def : G agit sur lui-même(X=G) par translation à gauche via : $\phi(g) = (x \mapsto g.x)$.
- Pro : Cette action est fidèle et transitive.
- App : Théorème de Lagrange : Pour H sous-groupe de G, $|H|||G|$.
- App : Théorème de Cayley : Tout groupe fini G est isomorphe à un sous-groupe transitif de $\Sigma_{|G|}$.
- Def : Soit H un sous-groupe de G. G agit sur l'ensemble des classes à gauche modulo H par $\phi(g)(g'H) = (gg'H)$.
- Pro : Cette action est transitive, mais en général pas fidèle ($Ker(\phi) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$)
- App : Théorème de Frobenius : Soit G groupe fini et H sous-groupe de G tel que $|G/H|$ soit minimal et $> 1$. Alors H est distingué dans G.
- App : Les groupes d'ordre pq, p,q premiers, possèdent toujours un sous-groupe distingué non trivial.

*2. Action par conjugaison. —*

- Def : G agit sur lui-même par conjugaison via $\phi(g)(h) = ghg^{-1}$.
- Pro : Pour $G \neq \{e\}$, cette action n'est pas forcément fidèle, et jamais transitive.
- Contre-ex : Pour $G = \Sigma_n$, $n \geq 3$, l'action est libre.
- Def : L'orbite de $h \in G$ par conjugaison est appelée classe de conjugaison de h.
  Deux éléments ayant la même classe de conjugaison sont dits conjugués dans G.
- Rem : Le centre de G est l'ensemble des points fixes par conjugaison.
- Pro : La conjugaison préserve l'ordre d'un élément.
- Ex : Les classes de conjugaison du groupe diédral $D_n$ sont de la forme $\{r^k, r^{-k}\}$, $\{sr^k, sr^{-k}\}$, $\forall 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, $\{e\}$ si n impair.
  Et de la forme $\{r^k, r^{-k}\}$,$\{sr^k, sr^{-k}\}$, $\forall 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$, $\{r^{\frac{n}{2}}\}$,$\{sr^{\frac{n}{2}}\}$, $\{e\}$ si n pair.
- Pro : i) Si $c \in \Sigma_n$ est un cycle d'ordre m, $c = (a_1, .., a_m)$, alors $\forall \tau \in \Sigma_n$, on a $\tau.c.\tau^{-1} = (\tau(a_1), .., \tau(a_m))$.
  ii) Pour c un k-cycle de $\Sigma_n$, la classe de conjugaison de c est l'ensemble des k-cycles de $\Sigma_n$.
  iii) Si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $A_n$.
- App : $A_n$ est simple pour $n \geq 5$.
- **Dev** : Soit H l'algèbre à division des quaternions, et G le groupe des quaternions de norme 1. L'action par conjugaison de G sur H laisse $Vect(i, j, k)$ stable, et induit un morphisme surjectif de G vers $SO_3(\mathbb{R})$. On a alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

– Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$.

*3. Théorèmes de Sylow.* —

– Def : Soit G un groupe fini de cardinal n, et p premier tq $p|n$. Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal $p^{v_p(n)}$.
– Ex : Le groupe $UT_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices trigonales supérieures avec des 1 sur la diagonale est un p-Sylow de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$.
– Pro : Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit S un p-Sylow de H. Alors il existe un p-Sylow $S'$ de G tel que $S = S' \cap H$.
– Théorèmes de Sylow : Soit G un groupe fini de cardinal n, et p premier divisant n.
i) G admet un p-Sylow.
ii) Tous les p-Sylow de G sont conjugués.
iii) Le nombre $n_p$ de p-Sylow de G vérifie $n_p | \frac{n}{p^{v_p(n)}}$ et $n_p \equiv 1 \ mod(p)$.
– App : Un p-Sylow de G est distingué ssi $n_p = 1$.
– App : Tout groupe d'ordre 63 possède un sous-groupe distingué non-trivial.
– App : Tout groupe d'ordre $pq$ avec $p < q$ premiers et $q \neq 1 \ mod(p)$ est cyclique.

## 3. Actions de groupes et algèbre linéaire. —

Cadre : K est un corps.

*1. Actions sur des espaces de matrices.* —

– Def : On fait agir $Gl_n(K) \times Gl_m(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ par $(P, Q).M = PMQ^{-1}$.
Deux matrices de $M_{n,m}(K)$ dans la même orbite sont dites équivalentes.
– Pro : Deux matrices de $M_{n,m}(K)$ sont dans la même orbite ssi elles ont le même rang.
– App : Résoudre un système linéaire $MX = B$ revient à résoudre $(PMQ^{-1})X' = B'$ pour $X' = QX$ et $B' = PB$. Def : On fait agir $Gl_n(K)$ sur $M_n(K)$ par $P.M = PMP^{-1}$.
Deux matrices de $M_n(K)$ dans la même orbite sont dites semblables.
– Pro : Deux matrices sont semblables ssi elles représentent la même application linéaire sur $K^n$ dans deux bases différentes.
– Pro : Deux matrices semblables ont même rang, trace, déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal.
– Def+Pro : Soit K un corps et $n \geq 1$. On peut faire agir $\Sigma_n$ sur $M_n(K)$ par $\sigma.M = (c_{\sigma(1)}, .., c_{\sigma(n)})$, où $c_1, .., c_n$ sont les colonnes de M.
Pour $T_\sigma$ la matrice dont le coefficient $(i, j)$ vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon, appelée matrice de permutation associée à $\sigma$, on a $\sigma.M = M.T_\sigma$.
– Pro : $\sigma \in \Sigma_n \mapsto T_\sigma \in Gl_n(K)$ définit un morphisme de groupes injectif.
– App : Pour tout groupe fini G, on a ainsi un morphisme de groupes injectif de G vers $Gl_{Card(G)}(K)$.
– **Dev** : Théorème de Brauer : Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique quelconque, $n \geq 1$, et $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$.
Alors $\sigma$ et $\sigma'$ sont conjuguées si et seulement si $T_\sigma, T_{\sigma'}$ sont semblables dans $Gl_n(\mathbb{K})$.
– Def : On fait agir $Gl_n(K)$ sur $S_n(K)$ par $P.S = PMP^t$.
Deux matrices de $S_n(K)$ dans la même orbite sont dites congruentes.
– Thm : Pour q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$, la matrice de la forme polaire de q est congruente à $Diag(I_r, 0)$ pour un $r \leq n$.
– Théorème d'inertie de Sylvester : Pour q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, la matrice de la forme polaire de q est congruente à $Diag(I_p, -I_r, 0)$ avec $p + r \leq n$.
– Théorème : Pour q une forme quadratique sur $\mathbb{F}_{p^m}^n$, la matrice de la forme polaire de q est congruente à $Diag(0, I_r)$ avec $r \leq n$ ou à $Diag(0, I_r, \varepsilon)$ avec $r \leq n - 1$ et $\varepsilon$ un non-carré de $\mathbb{F}_{p^m}$.
– **Dev** : Loi de réciprocité quadratique : Soient p,m des nombres premiers impairs distincts.

$$\text{Alors } \left(\frac{p}{m}\right) = \left(\frac{m}{p}\right).(-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{m-1}{2}}, \text{ où } \left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si x est un carré mod(p)} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ mod(p)} \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

*2. Actions sur des espaces vectoriels : représentations linéaires de groupes finis.* —

– Def : Une représentation linéaire $\rho$ sur un groupe fini G est un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$ où V est un $\mathbb{C} - ev$ de dimension finie.
– Def : Le caractère $\chi_\rho$ d'une représentation linéaire $\rho$ est l'application $g \in G \mapsto \chi_\rho(g) := Tr(\rho(g)) \in \mathbb{C}$.
– Def : Une sous-représentation d'une représentation $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation $\rho' : G \to GL(V')$ avec $V'$ s-ev de V tel que $\forall g \in G$, $V'$ est $\rho(g)$-stable avec $\rho(g)|_G = \rho'(g)$.
Une représentation est dite irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation stricte non-triviale.
Un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.
– Pro : Orthogonalité des caractères irréductibles pour le produit scalaire donné.
– Pro : Les caractères sont des fonctions centrales.
– Def : Table de caractères.
– Thm : Soit G un groupe d'ordre n. Soient $\rho_1, \dot{,} \rho_r$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de G, et soient $\chi_1, \dot{,} \chi_r$ les caractères irréductibles associés.
On note $K_{\chi_i} := \{g \in G \text{ tq } \chi_i(g) = \chi_i(e)\}$.
Alors $K_{\chi_i} = Ker(\rho_i)$ et les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\cap_{i \in I} K_{\chi_i}$, pour tout $I \subset \{1, \dot{,} r\}$.
– Cor : G est simple ssi pour tout caractère irréductible $\chi$ non-trivial et $\forall g \neq e$ on a $\chi(g) \neq \chi(e)$.
– App : $V_4$ est le seul sous-groupe distingué non-trivial de $A_4$. (Table de caractères en annexe)

- App : Sous-groupes distingués de $D_6$. (Table de caractères en annexe)

### 4. Applications à la géométrie. —

*1. Groupe des isométries d'un espace affine.* —

- Def : On appelle espace affine un ensemble $E$ sur lequel le groupe additif $(V,+)$ d'un espace vectoriel agit à droite transitivement et librement, via $(\overrightarrow{u}, M) \in V \times E \mapsto M + \overrightarrow{u}$.
  Les éléments de E sont appelés les points, et ceux de V les vecteurs.
- Rem : L'action étant libre et transitive, pour tous points $M, N \in E$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in V$ tel que $M + \overrightarrow{u} = N$. On note en général $\overrightarrow{MN}$ ce vecteur.
- Def+Pro : Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 3 et X une partie non-vide de E. $O(E)$ désigne le groupe des isométries affines de E. Le sous-groupe $Isom(X) := \{f \in O(E) \text{ tq } f(X) = X\}$ des isométries de l'ensemble X agit naturellement sur X.
  On note $Isom^+(X)$ le sous-groupes des isométries de X de déterminant 1.
- Pro : On note $\Delta_4$ le tétraèdre régulier. On a alors $Isom(\Delta_4) \simeq \Sigma_4$ et $Isom^+(\Delta_4) \simeq A_4$.
- Pro : On note $C_6$ le cube en 3 dimensions. Alors $Isom(C_6) \simeq \Sigma_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Isom^+(C_6) \simeq \Sigma_4$.

*2. Groupe projectif.* —
V est un K-ev de dimension finie n.

- Pro : L'action naturelle de $GL(V)$ sur $P(V)$ induit une action de $SL(V)$ sur $P(V)$.
- Def : On définit $PGL(V) := GL(V)/(K^*.Id_V)$ et $PSL(V) := SL(V)/(\mathbb{U}_n(K).Id_V)$
- Pro : $PGL(V)$ définit une action sur $P(V)$ qui est fidèle et 2-transitive.
  $PSL(V)$ définit une action sur $P(V)$ qui est fidèle et 3-transitive.
- App : Pour p premier et $r \geq 1$, on a $Card(PGl_n(\mathbb{F}_{p^r})) = \frac{Card(Gl_n(\mathbb{F}_{p^r}))}{p^r-1}$ et $Card(PSl_n(\mathbb{F}_{p^r})) = \frac{Card(Sl_n(\mathbb{F}_{p^r}))}{pcgd(p^r,n)}$.
- App : Quelques isomorphismes exceptionnels : $Gl_2(\mathbb{F}_2) = Sl_2(\mathbb{F}_2) = PGl_2(\mathbb{F}_2) \simeq \Sigma_3$
  $PGl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \Sigma_4$, $PSl_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.
  $PGl_2(\mathbb{F}_4) = PSl_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$

**Références**

Ulmer : Action de groupe, stabilisateur, orbites, fidèle, transitif,k-transitif, propriétés, exemples, décomposition d'une permutation en cycles. Relation orbite-stabilisateur, formule des classes, formule de Burnside, Th de Cauchy, points fixes d'un p-groupe. Action par translation à gauche, Th de Cayley, $G \curvearrowright G/H$ transitive, exemples. Action par conjugaison, classes, centre, prop, exemples. Représentations des groupes finis, Sous-groupes distingués et caractères d'un groupe. Espaces affines. Espaces projectifs, PGL,PSL, propriétés.
Perrin : $A_n$ est (n-2)-transitif. p-Sylow, $UT_n(\mathbb{F}_p)$, Th de Sylow, propriétés, exemples (63,15). Isomorphismes exceptionnels de PGL/PSL.
Caldero,Germoni : $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev) Equivalence matricielle, propriétés. Congruence matricielle, Classification des formes quadratiques, Loi de réciprocité quadratique.(Dev) Groupe d'isométries d'un solide, exemples.
FGN (Algèbre 1) : Th de Frobenius, groupes d'ordre pq jamais simples.
Gourdon : Similitude matricielle, invariants, propriétés, exemples.
Peyré : Représentations des groupes finis, tables de caractères.
Sans Ref : Th de Brauer.(Dev)

*June 7, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*