

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

I Partie A - Définitions [Amr] [Gou] [Rou]

I.1 Notions élémentaires

■ **Déf 1 (Différentiabilité) :**

■ **Déf 2 (Différentielle) :**

■ **Ex 3 :** La norme euclidienne, application linéaire, bilinéaire

■ **Prop 4 (Différentielle sur un espace produit) :**

■ **Prop 5 (Linéarité de la différentiation) :**

■ **Prop 6 :** Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

■ **Thm 7 (Règle de la chaine) :**

App 8 : Règle de la chaine le long d'un arc

■ **Ex 9 :** Différentielle de la norme.

■ **Déf 10 (Dérivée partielle) :**

■ **Prop 11 (Lien différentielle et dérivées partielles) :**

I.2 Inégalité des accroissements finis

■ **Thm 12 (IAF) :**

App 13 : Soit U connexe, alors f est constante sur U si et seulement si $df = 0$.

I.3 Exemples fondamentaux

■ **Ex 14 (Exponentielle) :**

■ **Ex 15 (Inverse) :**

■ **Ex 16 (Déterminant) :**

II Partie B - Différentielles d'ordre supérieur [Gou] [Amr] [Rou]

■ **Déf 17 (Différentielle d'ordre supérieur) :**

■ **Ex 18 :** $f(x, y) = x^2 e^y - y^3 e^2 x$.

Rem 19 : Identification avec les application bilinéaires.

■ **Thm 20 :** La différentielle seconde est bilinéaire symétrique.

■ **Thm 21 (Formule de Taylor reste intégral) :**

■ **Ex 22 :** Formule de Taylor pour $n = 0, 1$ et 2 .

III Partie C -TIL [Rou] [Amr]

III.1 Théorème d'inversion locale [Gou]

■ **Dév 23 (Théorème d'inversion locale) :**

■ **Contre-Ex 24 :** $f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$, mais f n'est inversible sur aucun voisinage de 0 .

App 25 (Logarithme matriciel) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local en 0 , mais ce n'est pas un difféomorphisme global dès que $n \geq 2$.

App 26 (Caractérisation isométries affines) :

■ **Prop 27 (TIL version $\mathcal{C}^k$) :**

■ **Déf 28 :** Un changement de coordonnées sur V est la donnée de $f_1, \dots, f_n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (u_1, \dots, u_n)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$.

■ **Thm 29 (Théorème du changement de coordonnées) :**

■ **Ex 30 (Coordonnées polaires) :**

III.2 Théorème d'inversion globale

■ **Thm 31 (Théorème d'inversion globale) :**

Rem 32 : Le TIG se réécrit pour les fonctions réelles sous la forme : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I sur $J = f(I)$.

Contre-Ex 33 : $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2 \subset \{(0, 0)\}$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point mais pas un difféomorphisme global.

IV Partie D - TFI [Rou] [Amr]

IV.1 TFI

Thm 34 (Théorème des fonctions implicites) :

Ex 35 : $x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1 = 0$ définit près de $(0, 0)$ une fonction implicite $\varphi(x, y) = z$ telle que $\varphi(0, 0) = 1$.

Rem 36 : La différentielle de φ est donnée par $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x(x, \varphi(x))$

Prop 37 (TFI version $\mathcal{C}^k$) :

App 38 : Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage Ω dans lequel toute matrice M est inversible. De plus, $M \rightarrow M^{-1}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de Ω sur son image.

App 39 : Une valeur approchée de $x^7 + 0.99x - 2.03 = 0$ est donnée par $x = 1.0049415$.

IV.2 Extrema liés

Thm 40 (Extrema liés) :

App 41 : Un parallélépipède d'aire minimum pour un volume donné est un cube.

Prop 42 (Inégalité de Hadamard) :

 **Dév 43 (Votre matrice la plus proche de chez vous) :**