

Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

I Partie A - TIL [Rou] [Amr]

I.1 Rappels importants

I.2 Théorème d'inversion locale [Gou]

 **Dév 1 (Théorème d'inversion locale) :**

Contre-Ex 2 : $f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$, mais f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

App 3 (Logarithme matriciel) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local en 0, mais ce n'est pas un difféomorphisme global dès que $n \geq 2$.

Prop 4 (TIL version $\mathcal{C}^k$) :

App 5 (Caractérisation isométrie affine) :

Déf 6 : Un changement de coordonnées sur V est la donnée de $f_1, \dots, f_n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (u_1, \dots, u_n)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$.

Thm 7 (Théorème du changement de coordonnées) :

Ex 8 (Coordonnées polaires) :

I.3 Théorème d'inversion globale

Thm 9 (Théorème d'inversion globale) :

Rem 10 : Le TIG se réécrit pour les fonctions réelles sous la forme : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I sur $J = f(I)$.

Contre-Ex 11 : $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2 \subset \{(0, 0)\}$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point mais pas un difféomorphisme global.

Prop 12 (TIG version holomorphe) :

II Partie B - TFI [Rou] [Amr]

Thm 13 (Théorème des fonctions implicites) :

Ex 14 : $x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1 = 0$ définit près de $(0, 0)$ une fonction implicite $\varphi(x, y) = z$ telle que $\varphi(0, 0) = 1$.

Rem 15 : La différentielle de φ est donnée par $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x(x, \varphi(x))$

Prop 16 (TFI version $\mathcal{C}^k$) :

Prop 17 (TFI version holomorphe) :

Ex 18 : $xy^5 - x^4 + y = 0$ définit au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ une fonction implicite $\varphi : x \rightarrow y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$. De plus, $\varphi(x) = x^4 + o(x^{15})$.

App 19 : Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage Ω dans lequel toute matrice M est inversible. De plus, $M \rightarrow M^{-1}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de Ω sur son image.

App 20 : Une valeur approchée de $x^7 + 0.99x - 2.03 = 0$ est donnée par $x = 1.0049415$.

III Partie C - Optimisation [Rou] [Amr]

Thm 21 (Extrema liés) :

App 22 : Un parallélépipède d'aire minimum pour un volume donné est un cube.

Prop 23 (Inégalité de Hadamard) :

 **Dév 24 (Votre matrice la plus proche de chez vous) :**

IV Partie D - Sous-variétés [Rou] [Amr]

IV.1 Définitions

Thm 25 (Théorème des sous-variétés) :

Ex 26 : Le cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est une sous-variété de dimension 2 en chacun de ses points sauf l'origine.

Ex 27 : $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de dimension n sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Déf 28 (Vecteur tangent) :

Prop 29 : Si V est lisse en a , de dimension d , ses vecteurs tangents forment un sev de dimension d , appelé espace tangent en a à V .

Prop 30 : Si $a \in V$ et si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $U \cap V = f^{-1}(0)$, et que $df(a)$ est surjective, alors $T_a V = \ker(df(a))$.

Ex 31 : $T_a \mathbb{S}^n = \{a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0\}$

IV.2 Exemples dans les matrices

Prop 32 : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$, et $T_A \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M : \mathrm{tr}(A^{-1}M) = 0\}$.

Prop 33 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$, et $T_A O_n(\mathbb{R}) = \{M : A^{-1}M \in A_n(\mathbb{R})\}$.