

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

[Amr] : *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mohammed El Amrani

[Bat-Zin] : *De l'Analyse fonctionnelle à la Théorie spectrale*, Athanasios Batakis, Michel Zinsmeister

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Cia] : *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Phillipe Ciarlet

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

I Partie A - Préambule

I.1 Rappels sur les espaces préhilbertiens et hilbertiens [Amr] [Li]

I.2 Exemples [Li] [Ber-Ber]

■ **Ex 1** : Espaces de dimension finie.

■ **Thm 2 (Riesz-Fischer)** :

■ **Dév 3 (Bergman)** :

II Partie B - The théorème

II.1 Théorème de projection [Li] [Amr]

■ **Thm 4 (Projection sur un convexe)** :

■ **Ex 5 (Projection sur un sev fermé)** :

■ **Ex 6 (Projection sur des figures)** : [Annexe : Projection sur un carré, c-ex]

■ **App 7 (Exercice de minimisation d'une intégrale)** :

■ **Thm 8 (Supplémentaire topologique orthogonal)** :

■ **Thm 9 (Critère de densité)** :

■ **App 10 (Densité de $\mathcal{C}_c$)** :

■ **Thm 11 (Hahn-Banach géométrique)** :

■ **App 12 (Sup de fonctions convexes)** :

II.2 Dual topologique et opérateur adjoint [Li]

■ **Thm 13 (Riesz)** :

■ **App 14 (Dual d'un hilbert)** :

■ **Déf 15 (Opérateur adjoint)** :

■ **Ex 16 (Opérateur de décalage)** :

■ **Prop 17 (Norme de l'adjoint)** :

III Partie C - Bases hilbertiennes [Amr] [Li]

■ **Déf 18 (Système orthonormé)** :

■ **Ex 19** : Base canonique, système trigonométrique.

■ **Thm 20 (Bessel)** :

■ **Prop 21 (Projection)** :

■ **Déf 22 (Base orthonormée)** :

■ **Thm 23 (Parseval)** :

■ **Ex 24 (Séries de Fourier)** :

■ **Thm 25 (Existence de bases hilbertiennes)** :

■ **Ex 26** : Polynômes de Legendre.

■ **App 27 (Isomorphisme à ℓ^2)** :

IV Partie D - Opérateurs compacts autoadjoints [Li][Bat-Zin]

IV.1 Opérateurs compacts

■ **Déf 28** : $T : E \rightarrow F$ est un opérateur compact si $T(B_E)$ est relativement compact dans F .

| **Ex 29 :** Les opérateurs de rang finis sont compacts.

| **Ex 30 :** Si $K \in L^2([0,1]^2)$, alors $T_K : f \rightarrow \int_0^1 K(\cdot, y)f(y)dy$ est compact dans $L^2([0,1])$.

| **Prop 31 :** L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

App 32 : Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

| **Prop 33 :** $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal bilatère.

App 34 : Un opérateur compact n'est pas inversible si E et F sont de dim infinie.

| **Thm 35 (Schauder) :** L'opérateur $T : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si $T^* : F^* \rightarrow E^*$ est compact.

IV.2 Théorie spectrale auto-adjointe

| **Prop 36 (Lien entre norme et produit scalaire) :**

| **Thm 37 (Spectre de T) :**

| **Thm 38 (Valeurs spectrales extrémales) :**

App 39 (Norme et rayon spectral) :

| **Prop 40 :** Tout auto-adjoint compact possède une valeur propre.

| **Contre-Ex 41 :** $Tf(x) = xf(x)$

| **Thm 42 (Théorème spectral) :**

|  **Dév 43 (Norme de l'opérateur de Volterra) :**

V Partie E - Convergence faible [Amr] [Li] [Ber-Ber]

V.1 Convergence faible

| **Déf 44 (Convergence faible) :**

| **Ex 45 :** Exemples classiques (voir [Amr] ou [Li])

| **Prop 46 (Propriétés classiques) :**

V.2 Optimisation dans un Hilbert [Cia]

| **Thm 47 (Banach-Alaoglu) :**

App 48 (Fonctionnelle convexe) :