

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

[Amr] : *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mohammed El Amrani

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Analystan*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

I Partie A - Approximation polynomiale [Gou] [Dem]

I.1 Formules de Taylor [Cal-Per]

Thm 1 (Taylor avec reste intégral) :

Thm 2 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Ex 3 : $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$.

 **Dév 4 (Quadrature de Gauss) :**

I.2 Approximation polynomiale sur un compact [Ber-Ber]

Thm 5 (Heine) :

App 6 : Les fonctions affines par morceaux $[a, b]$ sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$.

Thm 7 (Weierstrass) :

Contre-Ex 8 : $\exp$ ne peut pas être approchée par des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Déf 9 (Fonction équi-oscillante) :

Ex 10 : Polynômes de Tchebychev.

Prop 11 : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(f, R_n[X]) = \|f - P\|$. Alors $g := fP$ équi-oscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

Thm 12 (Meilleure approximation uniforme) :

 **Dév 13 (Runge) :**

 **Dév 14 (Réciproque (contre-exemple)) :**

II Partie B - Approximation dans L^p [Li]

Thm 15 (Densité des fonctions continues) :

II.1 Définition et conditions d'existence

Déf 16 (Convolution) : Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions boréliennes. On appelle convolée de f et g au point $x \in \mathbb{R}^d$ la quantité, lorsqu'elle est définie :

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Thm 17 (Convolution $L^p - L^q$) :

Ex 18 : Convolution avec une fonction à support compact.

Prop 19 : Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors l'application $\tau_f : x \rightarrow f(\cdot - x)$ est uniformément continue.

Thm 20 (Convolution $L^1 - L^\infty$) :

Thm 21 (Convolution $L^1 - L^p$) :

Cor 22 : $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach commutative pour la convolution.

II.2 Approximation de l'unité

Déf 23 : Une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si elle vérifie :

(i) $\forall n \geq 1, \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x)dx = 1,$

(ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n(x)|dx < +\infty,$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n(x)|dx = 0.$

Ex 24 : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x) dx = 1$. Alors la suite définie par $\alpha_n(x) := n^d \alpha(nx)$ est une approximation de l'unité.

Thm 25 : Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \alpha_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

App 26 (Inversion de Fourier) :

II.3 Propriétés de régularité de la convolution

Thm 27 : Si $f \in L^r(\mathbb{R})$ ($1 \leq r < +\infty$) et $\varphi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi$ est $\mathcal{C}^k$ et on a l'égalité :

$$(f * \varphi)^{(h)} = f * \varphi^{(h)} \quad \text{pour} \quad 0 \leq h \leq k.$$

Cor 28 : Pour $1 \leq r < +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^r(\mathbb{R})$.

III Partie C - Fourier [Amr] [Bec]