

Leçon 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Étude théorique des équations différentielles ordinaires.

1.1 Définitions.

[Ber17], I.2-3 et I.5

~ 8 items.

définition équation différentielle, cas ordre 1 et cas scalaire | définition solution | exemple | remarque : on peut se ramener à l'ordre 1 | définition problème de Cauchy | définition prolongement de solution | définition solutions maximales, globales | exemple

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité.

[Ber17], I.4, III.1 et III.8

~ 9 items.

lemme de Gronwall | application : unicité cas linéaire | définition fonction localement lipschitzienne | exemple : fonction $\mathcal{C}^1$ | théorème de Cauchy-Lipschitz, cas globalement Lipschitzien | exemple | théorème de sortie de tout compact | corollaire : lemme des bouts | exemple

2 Quelques exemples de méthodes de résolution.

2.1 Équations différentielles linéaires.

[Ber17], II.2-6

~ 11 items.

définition équation différentielle linéaire | Cauchy-Lipschitz linéaire | structure de l'ensemble des solutions | exemple | définition Wronskien, matrice fondamentale | solutions = $\Phi(t)C$ | exemple cas constant | variation de la constante | exemple scalaire ordre 1 | exemple scalaire ordre 2 | application : DEV 1

D1

Théorème. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

[Cal24], VI.2

2.2 Équations de Bernoulli et de Riccati.

[Ber17], IV.2

~ 7 items.

définition équation de Bernoulli | méthode | exemple | définition équation de Riccati | méthode | remarque si on n'a pas de solution particulière | DEV 2

D2

Théorème. 1. Soit y une solution maximale de $y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$ et I son intervalle de définition, où a et b sont continues et c dérivable ne s'annulant pas sur I . Soient $t_0 \in I$ et $z(t) = \exp(-\int_{t_0}^t c(s)y(s)ds)$. Alors z est solution sur I de $z'' - (\frac{c'(t)}{c(t)} + b(t))z' + a(t)c(t)z = 0$.

2. On considère l'équation $(R_0) : y' = 2 + ty + y^2$. Posons $z_1(t) = 1 - t^2$. Alors $\exists z_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction développable en série entière de rayon infini telle que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale y de (R_0) avec $y(0) = y_0$ est $-\frac{z_1' - y_0 z_2'}{z_1 - y_0 z_2}$ et son intervalle de définition est la composante connexe de 0 dans $\{z_1 - y_0 z_2 \neq 0\}$.

[Ber17], IV.exo17

3 Étude qualitative.

3.1 Équations autonomes, portraits de phase.

[Ber17], V.1-2 et V.4

~ 10 items.

définition équation autonome, champ de vecteur | définition trajectoire d'une solution, courbes intégrales | remarque : les trajectoires ne se croisent pas | définition orbite, portrait de phase | cas système scalaire dim 2 constant, dessins en annexe (V.4) | définition courbes de niveau (dimension 2) | définition isoclines | interprétation | définition point stationnaire | exemple (dessin en annexe)

3.2 Dynamique des populations.

[Ber17], V.2-3

~ 4 items.

définition intégrale première | remarque sur l'utilisation d'une intégrale première | système de Lotka-Volterra (dessin en annexe)

3.3 Stabilité des solutions ? ? ? ?

[Ber17], VI.1-2

~ 3 items.

définition stabilité, attractivité, stabilité asymptotique (cas globalement lipschitzien) | exemple : cas linéaire homogène constant | linéarisation

Références

[Ber17] F. BERTHELIN. *Équations différentielles*. CASSINI, 2017. ISBN : 9782842252298.

[Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.