Groupe dérivé

Développements : $\mathcal{A}_n$ simple et Groupes d'ordre pq.

I - Généralités

1 - Notion de classe

Déf 1. [3](p.9) Classes à gauche

NB 2. [3](p.9) Ce n'est pas un groupe en général.

Déf 3. [3](p.9) Indice

Théo 4. *[3](p.10) Lagrange*

2 - Sous-groupes distingués et groupes quotients

Déf 5. [3](p.11) Sous-groupes distingués

NB 6. [1](p.136)

- Dans tout groupe G, (e) et G sont des sous-groupes distingués.
- Dans un groupe abélien, tout sous-groupe est distingué.

Ex 7. [3](p.11) Si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, son noyau Ker$f$ est un sous-groupe distingué de G.

Déf 8. [3](p.12) Groupe simple

Ex 9. [2](p.32)(**Développement 1**) $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Théo 10. *[1](p.137) Si H est un sous-groupe distingué d'un groupe G alors l'ensemble quotient G/H peut être muni de la loi de composition quotient induite par celle de G, telle que, pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in G/H$, $\overline{xy} = \overline{x}\overline{y}$. Relativement à cette loi, G/H est un groupe et l'application $\pi : G \to G/H$ est un morphisme surjectif. Le groupe G/H est appelé le **groupe quotient**.*

Théo 11. *[1](p.137) Dans un groupe G, on a $H \lhd G$ si et seulement s'il existe un groupe G' et un morphisme de groupes f tel que $H = Ker(f)$.*

Ex 12. [1](p.138)

- $\mathcal{A}_n$ est le noyau du morphisme signature donc $\mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n$.
- E espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On a

$$\begin{array}{rcl} \det : GL(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ u & \longmapsto & \det(u). \end{array}$$

  Alors $SL(E) \lhd GL(E)$.

II - Etudes des sous-groupes distingués

1 - Caractérisation

Théo 13. *[1](p.140) H est un sous-groupe distingué d'un groupe G si et seulement si, pour tout $x \in G$, $Hx = xH$.*

Cor 14. [1](p.141)

- Si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \subseteq K$ alors $H \lhd G \Rightarrow H \lhd K$.
- H est un sous-groupe distingué si et seulement si il est stable pour tout automorphisme intérieur de G.

Ex 15. [1](p.142) Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ son centre

$$Z(G) = \{a \in G, ax = xa, \forall x \in G\}.$$

Alors $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Prop 16. *[1](p.142) Soit G un groupe. Si $G/Z(G)$ est monogène alors G est abélien.*

Prop 17. *[1](p.143) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Si $[G : H] = 2$ alors $H \lhd G$.*

Ex 18. [1](p.143)

- Pour tout $n \geq 2$, on sait que $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$, on retrouve donc que $\mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n$.
- Soit $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E de dimension finie. Alors, si $\mathcal{O}^+(E)$ désigne le groupe des rotations de E, ie $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) : \det(u) = 1\}$. Alors, on a $[\mathcal{O}(E) : \mathcal{O}^+(E)] = 2$ et donc que $\mathcal{O}^+(E) \lhd \mathcal{O}(E)$.

Prop 19. *[1](p.143) Soit G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. Si, pour tout $i \in I$, $H_i \lhd G$, alors $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$.*

Prop 20. *[1](p.144) Soit deux groupes G et G' et $f \in Hom(G, G')$, alors*

(i) Si $H \lhd G$, alors $f(H) \lhd f(G)$. De plus, si f est surjective alors $f(H)$ est distingué dans G'.

(ii) Si $H' \lhd G'$, alors $f^{-1}(H') \lhd G$

Prop 21. *Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G, alors*

(i) Si $H \lhd G$ alors $H \cap K \lhd K$.

(ii) Si $H \lhd G$ alors HK est un sous-groupe de G et $H \lhd HK$.

2 - Le normalisateur

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble de ses parties.

Déf 22. [1](p.145) Conjuguée

Prop 23. *[1](p.145) Si S est fini, tout S' conjugué de S est fini et $|S'| = |S|$.*

Déf 24. [1](p.146) Normalisateur

NB 25. [1](p.146) Si S est réduit à un singleton, alors le normalisateur est le centralisateur.

Théo 26. *[1](p.146) Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On a alors $H \lhd G$ si et seulement si $N_G(H) = G$.*

Prop 27. *[1](p.146) Soit G un groupe.*

- *Pour tout sous-groupe H de G, on a $H \lhd N_G(H)$.*
- *Si H et K sont deux sous-groupes de G tels que H est un sous-groupe de K. Si $H \lhd K$, alors K est un sous-groupe de $N_G(H)$*
- *Si K est un sous-groupe de $N_G(H)$ alors HK est un sous-groupe de G et $H \lhd HK$.*

NB 28. [1] Pour tout sous-groupe H de G, $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

III - Groupes quotients

1 - Propriétés

Théo 29. *[1](p.147) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Alors, pour tout groupe G' et pour tout morphisme $f \in Hom(G, G')$ tel que $H \subseteq Ker f$, il existe un unique morphisme $\phi \in Hom(G/H, G')$ tel que $\phi \circ \pi = f$.*

Cor 30. [1](p.148) Avec les mêmes hypothèses,

- Si f surjective alors ϕ est surjective.
- Si $H = \mathrm{Ker}(f)$, alors ϕ est injective.
- Si f est surjective et $H = \mathrm{Ker}(f)$, alors ϕ est un isomorphisme.

App 31. [1](p.149) Premier théorème d'isomorphisme

2 - Sous-groupe d'un groupe quotient

Théo 32. *[1](p.150) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Soit $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique.*

- *Tout sous-groupe $\overline{K}$ de G/H est l'image par π d'un unique sous-groupe K de G contenant H.*
- *Si K_1 est un sous-groupe de G tel que $H \nsubseteq K_1$, alors HK_1 est un sous-groupe de G contenant H et $\pi(K_1) = HK_1/H$.*

NB 33. [1](p.151)

- Il y a une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G/H et l'ensemble des sous-groupes de G contenant H.
- HK_1 est le sous-groupe de G engendré par $H \cup K_1$.
- Si G est additif, alors $\pi(K_1) = (H + K_1)/H$.

Ex 34. [1](p.151) Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'écrit $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec k divise n dans $\mathbb{N}^*$.

Prop 35. *[1](p.152) Soit G un groupe et $H \lhd G$.*

- *Soit K et K' sont deux sous-groupes de G contenant H. Si $H \leq K \leq K'$, alors $K/H \leq K'/H$.*
- *($H \leq K$ et $K \lhd G$) si et seulement si $K/H \lhd G/H$.*

3 - Deuxième et troisième théorème d'isomorphisme

Théo 36. *[1](p.153) Deuxième théorème d'isomorphisme.*

Théo 37. *[1](p.155) Troisième théorème d'isomorphisme*

IV - Groupes et sous-groupes remarquables

1 - Groupe dérivé

Déf 38. [1](p.156) Commutateur

NB 39. [1](p.156)

- G est abélien si et seulement si, pour tout $x, y \in G$, $[x, y] = e$.
- Si ($H \lhd G$ et x ou y dans H), alors $[x, y] \in H$.

Déf 40. [1](p.156) Groupe dérivé

NB 41. [1](p.156) G abélien si et seulement si $D(G) = \{e\}$.

Théo 42. *[1](p.156) Soit G un groupe. On a*

- *$D(G) \lhd G$*
- *Si $N \lhd G$, alors G/N est un groupe abélien si et seulement si $D(G) \subseteq N$. En particulier, $G/D(G)$ est abélien.*

2 - Théorème de Sylow

Déf 43. [3](p.18) p-Sylow

NB 44. [3](p.18) Soit P un p-Sylow.

- P est un p-groupe
- $[G : P]$ est premier avec p.

Théo 45. *[3](p.18) Sylow*

Théo 46. *[3](p.19) Sylow bis*

Cor 47. Si S est un p-Sylow de G, on a

$$S \lhd G \Leftrightarrow S \text{ est l'unique } p\text{-Sylow de } G \Leftrightarrow k = 1.$$

App 48. [4](p.277) Soit G un groupe simple de cardinal $|G| = 60$. Alors $G \simeq \mathcal{A}_5$.

Références

[1] Josette Calais. *Elements de théorie des groupes.* PUF, 1984.

[2] Serge Lang. *Algèbre.* Dunod, 2014.

[3] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.

[4] Aviva Szpirglas. *Algèbre L3.* Pearson Education, 2009.