

[R]
[TL1]
[ELA] [ELA2]

235: Problèmes d'interversion de symboles en analyse

I - Fonctions et suites de fonctions

1) Continuité [R] 281 56-60 [TL1] 488

- def continuité 285
- continuité unif $\Rightarrow$ continuité CE: $x \mapsto x^2$
- Th Heine

2) Convergence des suites de fct [ELA] 143

- def cv simple, cv unif
- Rq cv unif $\Rightarrow$ cv simple

3) Interversion de limites et dérivées [ELA] 150

- Th $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow \alpha} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))$ -157
- Th de Schwarz + ex

II - Interversions avec le signe intégrale

1) Th de convergence [ELA2] 405-409

- Th cv monotone, Fatou, CVD

2) Intégrales à paramètres [ELA2] 410

- Th continuité et dérivabilité
- Application: intégrale de Gauss

3) Th de Fubini [ELA2] 422

- Théorèmes
- Volume boule unité

4) Application aux TF [ELA2] 109

- Def
- TF injective

Feuille
un (4)
applications
à la TF

DEV 1

DEV 2

III - Séries de fonctions

1) CV de séries de fct [ELA] 193-196

- def série de fct
- def cv simple et uniforme
- Rq cv uniforme du reste vers 0
- def cv absolue cv normale
- cv normale $\Rightarrow$ cv unif
- cv absolue $\Rightarrow$ cv simple

$\hookrightarrow$ ex $\sum e^{-nx}$ cv simplement pas unif $x \in \mathbb{R}_+^*$

2) Interversions avec le signe somme [ELA] 199-203

- Th d'inversion
- Th pour dériver sous la somme
- Th pour inverser somme et intégrale

Exercer 37

3) Développement en série entière [ELA]

- def développable en série entière

Rayon de cv

- Prop intervalle de dérivabilité

ex : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- continuité

235: Problèmes d'interversion de symboles en analyse

I- Fonctions et suites de fonctions

1) Continuité

Définition 1: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

f est continue sur I ssi:

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \eta > 0 \forall y \in I \mid x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

f est uniformément continue sur I ssi:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \forall x, y \in I \mid x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Proposition 2: Continuité uniforme $\Rightarrow$ continuité

Exemple 3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4: (Heine) Si f est continue sur un compact alors elle est uniformément continue.

2) Convergence des suites de fonctions

Définition 5: Soit f_n une suite de fonctions de $X \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ un e.v.n converge vers f sur X si:

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

f_n converge uniformément vers f sur X si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in X \mid \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

Proposition 6: convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple

Exemple 7: $\forall n > 0 \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ mais ne converge pas uniformément

3) Interversion de limites

Théorème 8 (de la double limite)

Soit X une partie non vide d'un e.v.n de dimension finie F , soit E un e.v.n, soit (f_n) suite d'applications de X dans E convergent uniformément sur X vers f , et soit $a \in X$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe. Si E complexe on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Théorème 9: Soit E un e.v.n, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit (f_n) une suite d'applications dérivables de I dans E convergent simplement vers f .

Si (f'_n) converge uniformément sur I , alors f est dérivable et $\forall x \in I \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$

II- Interversions avec le signe intégrale

1) Théorèmes de convergence

Théorème 10: (Convergence monotone)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissante mesurable f convergent presque partout vers f .

$$\text{Alors } \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

lemme 11: (Fatou)

Pour toute suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables positives, on a $\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x) dx$

Théorème 12: Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables convergent presque partout vers f , et telle que

il existe une fonction g intégrable vérifiant pour tout n $\|g_n\| \leq g$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} g_n dt = \int_0^{2\pi} g dt$

Exemple 13: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{n} dt = 0 \quad n \geq 1$

2) Intégrales à paramètres

Théorème 14 (continuité)

Soit $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que:

- $\forall n \in X, t \mapsto f(n, t)$ intégrable sur I
 - $\forall t \in I, n \mapsto f(n, t)$ continue sur X
 - $\exists g \in L^1(I)$ telle que $\forall (n, t) \in X \times I \quad |f(n, t)| \leq g(t)$
- Alors la fonction $F: n \mapsto \int_I f(n, t) dt$ bien définie et continue

Théorème 15 (dérivabilité)

Soit $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que:

- $\forall n \in X \quad t \mapsto f(n, t)$ est intégrable sur I
- $\forall t \in I \quad n \mapsto f(n, t)$ dérivable sur X
- $\forall n \in X \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(n, t)$ intégrable sur I
- $\exists R \in L^1(I), \forall (n, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(n, t) \right| \leq R(t)$

Alors $F(n) = \int_I f(n, t) dt$ est définie et dérivable sur X avec $F'(n) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(n, t) dt$

Application 16: Intégrale de Gauss

$$\forall a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \boxed{\text{DEV 1}}$$

3) Théorèmes de Fubini

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaces mesurés σ -finis

Théorème 17: (Fubini-Tonelli)

Soit $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable.

- $\forall x \in X \quad y \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}$ mesurable et $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu$ est $\mathcal{A}$ mesurable
- $\forall y \in Y \quad x \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{A}$ mesurable et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu$ est $\mathcal{B}$ mesurable.
- On a: $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu$

Théorème 18 (Fubini-Lebesgue)

Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à $\mu \otimes \nu$

Alors: pour presque tout $x \in X, y \mapsto f(x, y)$ est intégrable

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu$ est μ intégrable

$$\begin{aligned} \text{De plus on a: } \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$

4) Application:

Définition 19: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\forall n \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t) e^{-int}$ est mesurable.

on définit $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-int} f(t) dt$ la transformée de Fourier de f

Théorème 20: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g(u) du \quad \text{DEV 2 a)}$$

Théorème 21: Injectivité de la Transformée de Fourier
 $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective DEV 2 b)

III - Séries de fonctions

1) Convergence des séries de fonctions

Définition 22: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$. On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$ la suite $(S_n)_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k$$

On appelle reste d'ordre n : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ $\forall x \in X$

Définition 23: On dit que $\sum f_n$ converge:

- simplement sur X si $(S_n)_n$ converge simplement
- uniformément sur X si $(S_n)_n$ converge uniformément

Proposition 24: $\sum f_n$ converge uniformément sur X

$$\text{ssi } \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Définition 25: $\sum f_n$ converge:

- absolument si $\forall x \in X$ $\sum |f_n(x)|$ converge
- normalement si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est bornée et $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge

2) Interversions avec la signe somme

Théorème 26: Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans $\mathbb{C}$. On suppose:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- $\sum f_n$ converge uniformément sur X

Alors 1) la série $\sum g_n$ converge dans $\mathbb{C}$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n g_k(n) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_k(n)$$

Exemple 27: $\forall n \in [0, 1]$ $g_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^k}{k!} \right)$$

Théorème 28: Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ soit convergente dans $\mathbb{C}$ et que $\sum f'_n$ converge uniformément sur I .

$$\text{Alors } \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$$

Théorème 29: Soit $g_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ suite de fonctions intégrables

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformément, alors la somme g est intégrable sur I et on a:

$$\int_I g = \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_I g_n \right)$$

Motivation: Quand peut-on intervertir $\int$ et $\lim$ et $\sum$

! on a pas toujours le droit

...

L

Quels sont les critères ?

Séries de fonctions

$$\sum \lim = \lim \sum$$

$$\frac{d}{dx} \sum = \sum \frac{d}{dx}$$

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse

Interversion lim et $\int$

Interversion dérivée et $\int$

Théorème

Interversion $\int$ et $\sum$

Fubini

L Application aux TF DEV 2

L Application

Intégrale Gauss DEV 1

Pb avec les fonctions, suites de fonctions

L définitions de continuité

- continuité
- continuité uniforme

$$\Delta \forall \varepsilon \neq 0 \exists \delta \forall x \rightarrow x^2$$

Th CVD, Fatoou } critères pour que ça soit OK