

[G] [OA]
[Rouv]
[ELAC]

214. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites Illustration en analyse et géométrie

I-Préambule [ELAC] 211 180 [G] 355 -212

- def C^1 difféo
- $(\cos \alpha, \sin \alpha)$
- $D(f^{-1})(y)$
- Th changement de variable
- $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$

II-TIL, TFI

1) TIL [Rouv] 188-191 [G] 343

- Th
- $f(U)$ ouvert
- inversion globale
- CE sans injectivité
- version C^k
- app ouverte

2) TFI [Rouv] 192-193 196-199

- Th
- interprétation
- ex
- version C^k
- vecteur tangent + Th

III-Applications

1) Optimisation [G] 337 339 [OA] 35

- extremas liés
- def multiplicateurs de Lagrange
- Th spectral

DEV1

• Minimum d'une norme

2) Fonctions strictement monotone [G] 350

DEV2

• Th

ex local pas global TIL

214: Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Illustration en analyse et géométrie

I - Preamble

Définition 1: Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de classe C^1 si f bijective de U sur V , C^1 sur U et sa bijection réciproque f^{-1} est C^1 sur V .

Exemple 2: $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un C^1 difféomorphisme

Proposition 3: Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $f: U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme, alors sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme et $D(f^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$ avec $x = f^{-1}(y)$

Théorème 4: (Changement de variable)

Soit φ un C^1 -difféomorphisme de U sur V et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\int_V f(v) dv = \int_U f(\varphi(u)) |J(\varphi)(u)| du.$$

Application 5: $\forall a > 0 \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

II - Théorème d'inversion locale, Théorème des fonctions implicites

1) Théorème d'inversion locale (I.I.L.)

Théorème 6: Soit u un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: u \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur u . Soit $x_0 \in u$ tel que $Df(x_0)$ est inversible. Alors il existe un ouvert $V \subset u$ contenant x_0 et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ contenant $f(x_0)$ tel que $f: V \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme

Proposition 7: Soit $f: V \rightarrow W$ un C^1 difféomorphisme. Alors $\forall u$ ouvert de V , $f(u)$ est un ouvert de W

Théorème 8: Soit $u \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: u \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On suppose f est injective sur u et que, $\forall x \in u$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible.

Alors $f(u)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un difféomorphisme de classe C^1 de u sur $f(u)$

Contre-exemple 9: sans injectivité, f n'est pas forcément un difféomorphisme global:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \text{ sur } u = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Théorème 10: On a la même énoncé et conclusion que le théorème 6, en remplaçant " C^1 " par " C^k " pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 11: Soit $f: u \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On suppose que $\forall x \in u$ Df_x est inversible et bijective. Alors f est une application ouverte.

2) Théorème des fonctions implicites (TFI)

Théorème 12: (TFI)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in U$ et $f: (x, y) \in U \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a, b)$ est inversible.

Alors l'équation $f(x, y) = 0$ se résout localement par rapport aux variables y : $\exists V$ voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^m$ avec $V \times W \subset U$ et $D_y f(x, y)$ inversible $\forall (x, y) \in V \times W$ et il existe une unique application $\varphi: V \rightarrow W$ telle que $(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$. De plus φ est de classe C^1 sur V .

Remarque 13: le théorème signifie que l'ensemble défini implicitement par $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement être vu comme le graphe d'une fonction φ .

Exemple 14: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

$$(a_1, b_1) = (0, 1) \quad V_1 =]-1, 1[\quad W_1 =]0, \infty[\quad \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(a_2, b_2) = (0, -1) \quad V_2 =]-1, 1[\quad W_2 =]-\infty, 0[\quad \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Théorème 15: Même énoncé et conclusion que que le TFI en remplaçant "classe C^1 " par "classe C^k ".

Définition 16: Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in V$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent en a à V s'il existe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable (où $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$) telle que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Théorème 17: Si V est lisse en a , de dimension d , ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d , appelé espace vectoriel tangent en a à V .

III - Applications

1) Optimisation

Théorème 18: (Extremes liés)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_i(x) = 0\}$. Si f admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

$$Df_a = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a)$$

Définition 19: des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ du théorème précédent sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

g est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

Application 20 (Théorème spectral)

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise en une BON.

Application 21: $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in S_n(\mathbb{R})} \|PM\|^2\}$
où $\| \cdot \| : M \mapsto \sqrt{\text{tr}(MM^T)}$

$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ minimisant la norme euclidienne de $M_n(\mathbb{R})$.

2) Fonctions strictement monotone

Théorème 22: Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Une application $g: E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que:

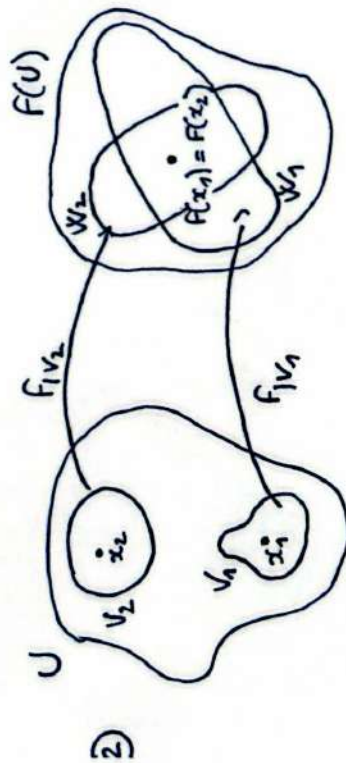
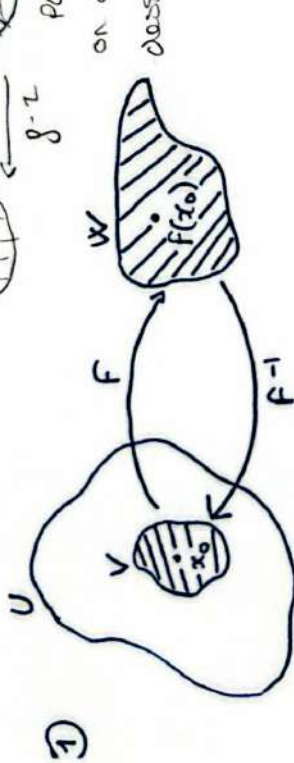
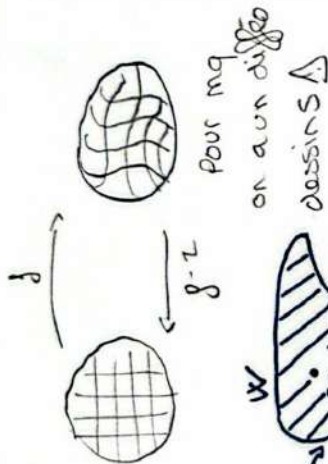
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2 \quad (*)$$

On a alors:

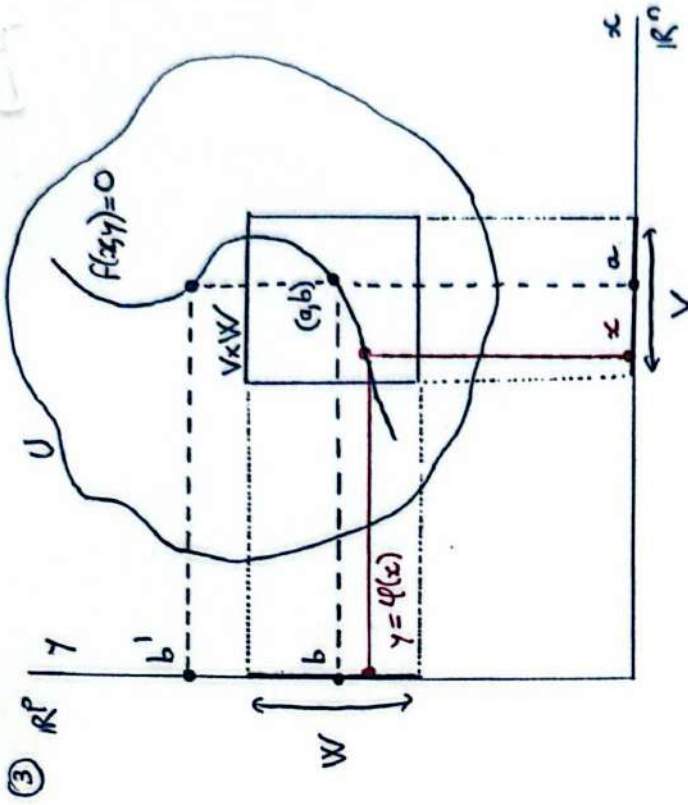
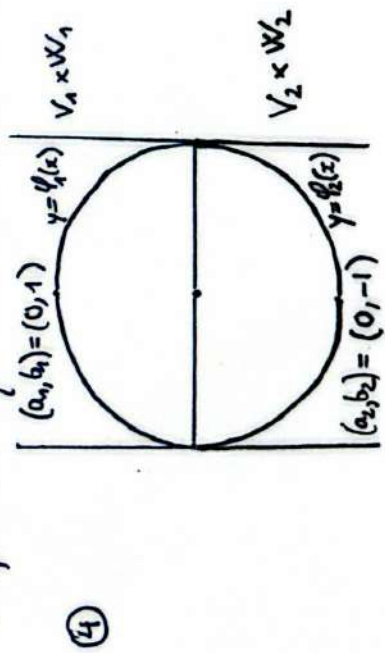
1) $g: E \rightarrow E$ de classe $C^1 \iff \forall x \in E \quad \forall h \in E$
et vérifie $(*)$ $\langle Dg_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$

2) si $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifie $(*)$, alors

ANNEXE



L'injectivité empêche de tels recouvrements.



Références :

- "Petit Guide de calcul différentiel..." F. Rouvier [Rou]
- "Objectif Agregation" V. Beck
- "Leçon d'Analyse, l'agregation à l'oral de l'agregation"
- K. Madère nos précisions 24 du plan, détails p. 117.
- "Mathématiques pour l'agregation, Analyse et probabilités"
- U.E Rombaldi.

Raisonner à diffeomorphisme
 local près permet d'obtenir
 une + grande liberté locale
 et une flexibilité supérieure
 dont on espère pouvoir en
 tirer des info globales

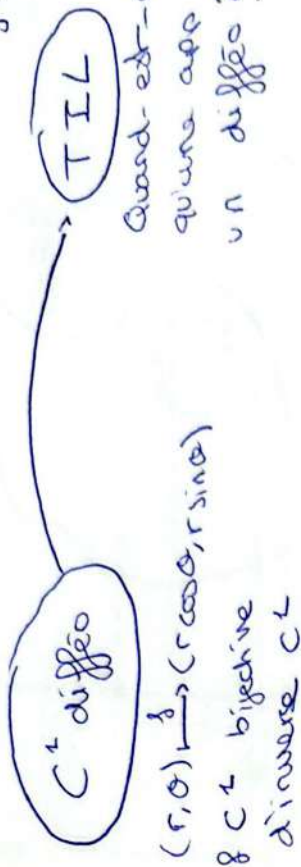
214: TIL TFI

Illustration en analyse et géométrie

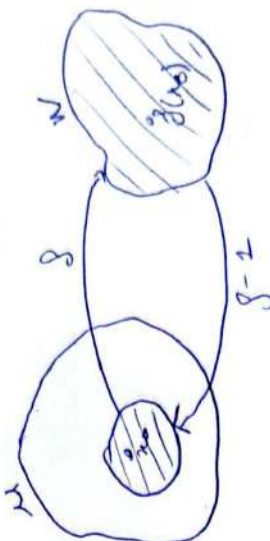
Extremes liés

SO_n($\mathbb{R}$) minimise DEV_1
 la norme euclidienne de $M_n(\mathbb{R})$

Fct strictement monotone DEV_2
 lien avec l'inversion local



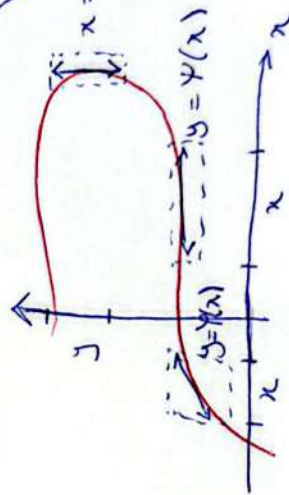
local autour de x_0
 si $Dg(x_0)$ inversible



TFI

$$f(x, y) = 0$$

→ cas global si $Df(x)$ inversible
 $\forall x \in U$



pour résoudre
 $y = f(x)$