I - Généralités

Déf 1. [1](p.226) Sous-groupe des nombres complexes de module 1

NB 2. [1](p.226) Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est le cercle unité.

Théo 3. *[1](p.226) L'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (r, u) & \longmapsto & ru \end{array}$$

définit un isomorphisme du groupe produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Théo 4. *[1](p.226) L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & x & \longmapsto & \exp(ix) \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$. Le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$ où le nombre π est défini comme étant le double du plus petit réel $\alpha > 0$ tel que $Re(\mathcal{E}(\alpha)) = 0$.

Déf 5. [1](p.227) Fonctions sinus et cosinus

For 6. [1](p.227) Moivre

For 7. [1](p.227) Euler

App 8. [1](p.228) Calcul de $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

App 9. [1](p.228) Linéarisation de $\cos^n(x)$.

Déf 10. [1](p.232) Argument

Théo 11. *[1](p.233) Si $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\arg(z)$ est non vide et pour tout $\theta_0 \in \arg(z)$, on a :*

$$\arg(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Déf 12. [1](p.234) Argument principal

II - Sous-groupes de l'unité

1 - Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Théo 13. *[1](p.234) Soit $n \geq 2$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$. L'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de de z_0, c'est-à-dire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, z^n = z_0\}$ est de cardinal n. Pour tout $\theta \in \arg(z_0)$, on a*

$$\{z \in \mathbb{C}, z^n = z_0\} = \left\{ |z_0|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Déf 14. [1](p.235) Groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité Π_n

NB 15. L'enveloppe convexe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forme un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle.

Théo 16. *[1](p.235) Le groupe Π_n est cyclique. Ses générateurs sont les nombres*

$$\xi_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = 1.$$

Déf 17. [1](p.235) Racine $n^{\text{ième}}$ primitive

NB 18. [1](p.236) Le nombre de racines $n^{\text{ièmes}}$ primitives de 1 est $\phi(n)$ où ϕ est l'indicateur d'Euler.

Théo 19. *[1](p.236) Soit $n \geq 2$. Le seul sous-groupe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est Π_n.*

2 - Polynômes cyclotomiques

Déf 20. [3](p.91) Polynômes cyclotomiques

Prop 21. *[3](p.91)(Développement 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d.$$

En particulier, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Théo 22. *[3](p.91)(Développement 1) Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.*

III - Applications...

1 - ... des polynômes cyclotomiques

Théo 23. *[3](p.93) Wedderburn*

Théo 24. *[3](p.92) Dirichlet faible*

Théo 25. *[2][Kronecker](Développement 2) Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieure ou égal à 1. On suppose $P(0) \neq 0$. Alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.*

Cor 26. [3](p.89) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible tel que toutes les racines de P soient dans $D(0, 1)$. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

2 - ... à l'algèbre linéaire

For 27. [3](p.146) Calcul du déterminant circulant

Prop 28. *Valeurs propres d'une matrice unitaire (ou orthogonale) sont de module 1*

Références

[1] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse. *Cours de mathématiques - Algèbre 1*. Dunod, 1992.

[2] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1*. Cassini, 2001.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Algèbre*. Ellipses, 2009.