

Sujet choisi : 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Autre sujet :

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit V un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.I. Formes quadratiquesI.1. Formes bilinéaires

Def 1 : Une application $\phi : V \times V \rightarrow K$ est dite bilinéaire si $\forall x \in V, \phi(x, \cdot)$ est linéaire et $\forall y \in V, \phi(\cdot, y)$ est linéaire. On note $\text{Bil}(V \times V)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $V \times V$.

Prop 2 : $\text{Bil}(V \times V)$ est un K -ev isomorphe à $\mathcal{L}(V, V^*)$ via : $\phi \mapsto \left(\begin{array}{c} V \rightarrow V^* \\ x \mapsto \phi(x, \cdot) \end{array} \right)$

Rem 3 : On peut, via ϕ , voir une forme bilinéaire comme une application linéaire.

Prop 4 : $\text{Bil}(V \times V)$ est isomorphe à $M_n(K)$ via le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V on pose $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\phi)$ ont $\phi \in \text{Bil}(V \times V)$ est $\mathcal{B}$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

Ex 5 : $K^2 \times K^2 \rightarrow K$ est une forme bilinéaire sur $K^2 \times K^2$ est sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prop 6 : Soit $\phi \in \text{Bil}(V \times V)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de V et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P$.

Def 7 : $GL_n(K)$ agit sur $M_n(K)$ par $P \cdot M = PMP$. Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites conjuguées.

Def 8 : On note $S(V \times V)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, c'est-à-dire telles que $\phi(x, y) = \phi(y, x) \forall x, y \in V$. On note $A(V \times V)$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques, c'est-à-dire telles que $\phi(x, y) = -\phi(y, x) \forall x, y \in V$.

Prop 9 : $S(V \times V)$ et $A(V \times V)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\text{Bil}(V \times V)$ et $\text{Bil}(V \times V) = S(V \times V) \oplus A(V \times V)$.

Prop 10 : $M_n(K) \simeq S_n(K) \oplus A_n(K)$.

I.2. Définition des formes quadratiques

Def 11 : Une forme quadratique sur V est une fonction $q : V \rightarrow K$ telle qu'il existe $\phi \in \text{Bil}(V \times V)$ vérifiant $\forall x \in V, q(x) = \phi(x, x)$. On note $Q(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V .

Un couple (V, q) avec $q \in Q(V)$ est appelé espace quadratique.

Prop 12 : $Q(V)$ est un K -espace vectoriel.

Prop 13 : L'application $S(V \times V) \rightarrow Q(V)$ $\phi \mapsto (x \mapsto \phi(x, x))$ est un isomorphisme.

Cor 14 : $\dim Q(V) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Def 15 : La forme polaire d'une forme quadratique q est l'unique $\phi_q \in S(V \times V)$ telle que $\forall x \in V, q(x) = \phi_q(x, x)$.

Prop 16 : (Formules de polarisation) $\forall q \in Q(V), \forall x, y \in V$,
 i/ $q(x+y) = q(x) + 2\phi_q(x, y) + q(y)$
 ii/ $\phi_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$
 iii/ $\phi_q(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - q(x+y) + q(x-y))$

Ex 17 : (Exemples de formes quadratiques)

- $V = K^2, q(x, y) = x^2 + xy, \phi_q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $V = M_n(K), q(A) = \text{tr}(A^2), \phi_q(A, B) = \text{tr}(AB)$
- $f, g \in V^*, q(x) = (f(x)g(x)), \phi_q(x, y) = \frac{1}{2}(f(x)g(y) + f(y)g(x))$

Def 18 : On définit la matrice d'une forme quadratique $q \in Q(V)$ dans une base $\mathcal{B}$ de V par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_q)$.

Ex 19 : $V = K^2, q(x, y) = x^2 + xy, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prop 20 : La matrice d'une forme quadratique dans une base est symétrique.

Prop 21 : $\forall q \in Q(V), \forall \mathcal{B}$ base de $V, \forall x \in V$ on a $q(x) = {}^t x \Pi x$ où $\Pi = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\Pi = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.

Cor 22 : Soient $q : V \rightarrow K$ une application, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V et $f : K^n \rightarrow K$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = q(\sum_{i=1}^n x_i e_i)$. Alors, $q \in Q(V) \Leftrightarrow f$ est polynôme homogène de degré 2.

Prop 23 : L'ensemble des formes quadratiques sur $M_n(K)$ est stable par conjugaison et est un sous-espace vectoriel de $Q(M_n(K))$ de dimension 2 engendré par $(A \mapsto (tr A)^2)$ et $(A \mapsto tr(A^2))$.

App 24 : C_2 , la forme quadratique qui associe à une matrice le coefficient devant X^{n-2} de son polynôme caractéristique vérifie $\forall A \in M_n(K), C_2(A) = \frac{1}{2}((tr A)^2 - tr(A^2))$.

I.3. Invariants

Def 25 : Deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') sont dits isomorphes s'il existe $\alpha : V \rightarrow V'$ isomorphisme tel que $q = q' \circ \alpha$.

Prop 26: Soient (V, q) et (V', q') deux espaces quadratiques. L'ASSE:

- i/ (V, q) et (V', q') sont isomorphes.
- ii/ $\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V et V' , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q')$ sont congruents.
- iii/ $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V et V' , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q')$ sont congruents.

Def 27: Soit $q \in Q(V)$. On définit:

- le rang de q comme $\text{rg}(q) := \text{rg}(\phi_q) := \text{rg}(\Psi(\phi_q))$. On a $\text{rg}(q) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q))$ car $\mathcal{B}$ est une base quelconque de V .
- le noyau de q comme $\text{Ker}(q) := \text{Ker}(\phi_q) = \text{Ker}(\Psi(\phi_q))$. On a $\text{Ker}(q) = \{x \in V \mid \forall y \in V, \phi_q(x, y) = 0\}$.
- le cône isotrope de q comme $C(q) := \{x \in V \mid \phi_q(x, x) = 0\}$.

Prop 28: $\forall q \in Q(V)$, $\text{Ker}(q) \subseteq C(q)$.

Prop 29: $\forall q \in Q(V)$, $\forall x \in V, \forall \lambda \in K$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$. En particulier, (q) est un cône.

Rem 30: En général, $(q) \neq \text{Ker}(q)$ car (q) n'est pas un espace vectoriel.

Un exemple pour $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $C(q) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Def 31: On dit que $q \in Q(V)$ est:

- non-dégénérée si $\text{Ker}(q) = \{0\}$, et dégénérée sinon.
- anisotrope si $C(q) = \{0\}$ et isotrope sinon. On dit que q est anisotrope si $x \in (q) \Rightarrow x = 0$.

Prop 32: $\forall q \in Q(V)$, $\exists \bar{q} \in Q(V)$ tel que $q = \bar{q} \circ \pi$ où $\pi: V \rightarrow V/\text{Ker}(q)$ est la projection canonique. De plus, $\bar{q}$ est non-dégénérée.

Def 33: On définit le discriminant de $q \in Q(V)$ par $\text{disc}(q) = 0$ si q est dégénérée et par la classe de $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q))$ dans $K^\times / (K^\times)^2$ où $(K^\times)^2$ est le sous-groupe de $K^\times$ formé des carrés des éléments de $K^\times$ et $\mathcal{B}$ est une base de V quelconque. On appelle discriminant réduit de q le discriminant de $\bar{q}$.

Ex 34: $q: K^n \rightarrow K$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec $a_1, \dots, a_n \in K$. Alors, $\pi: \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique on a: $\text{rg}(q) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \neq 0\}$, $\text{Ker}(q) = \text{Vect}\{e_i \mid a_i = 0\}$, $\text{disc}(q) = \prod_{i=1}^n a_i \in K^\times / (K^\times)^2$ si $a_i \neq 0 \forall i$.

Rem 35: le rang, la dimension du noyau, le discriminant et le discriminant réduit sont des invariants par isomorphismes d'espaces quadratiques. En général, ils ne sont pas totaux.

II. Classification des formes quadratiques

II.1. Orthogonalité

Soit (V, q) un espace quadratique.

Def 36: Soit $X \subseteq V$. On définit l'orthogonal de X comme $X^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in X, \phi_q(x, y) = 0\}$.

Prop 37: i/ $V^\perp = \text{Ker}(q)$ ii/ $\forall X, Y \subseteq V$, $X \subseteq Y \Rightarrow X^\perp \supseteq Y^\perp$

iii/ $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et c'est un sous-espace vectoriel de V .

iv/ $\forall F, G \subseteq V$ ser, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ v/ $\forall F, G \subseteq V$ ser, $(F \cap G)^\perp \supseteq F^\perp + G^\perp$

vi/ $\forall F \subseteq V$ ser, $\text{Ker}(q|_F) = F \cap F^\perp$

vii/ Si q est non-dégénérée, $\forall F \subseteq V$ ser, $\dim F^\perp + \dim F = \dim V$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Def 38: Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de V est dite q -orthogonale si $\forall i \neq j$, $\phi_q(e_i, e_j) = 0$.

Rem 39: En général il n'y a pas de lien entre l'orthogonalité et la liberté. Par exemple, pour $q(x, y) = x^2 - y^2$, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est q -orthogonale mais pas libre et $\{(1, 1), (1, -1)\}$ est libre mais pas q -orthogonale.

Prop 40: Une famille q -orthogonale de vecteurs anisotropes est libre.

Prop 41: Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V est q -orthogonale si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale si et seulement si $q = \sum_{i=1}^n q(e_i) (e_i^\vee)^2$ où $(e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

Thm 42: (Gauss). Il existe une base orthogonale. Il existe un algorithme pour la déterminer explicitement (cf. exercice).

Rem 43: L'intérêt de l'écriture d'une forme quadratique dans une base orthogonale est de se ramener au cas de l'exemple 24 où les invariants sont faciles à déterminer.

II.2. Classification sur $\mathbb{C}$

Thm 44: Soit V un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie. Toute forme quadratique q sur V peut s'écrire $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une famille libre de V^* et $n = \text{rg}(q)$.

Thm 45: Toute matrice carrée complexe symétrique de rang n est congrue à $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rem 46: Dans le cas $K = \mathbb{C}$, le rang est donc un invariant total.

II.3. Classification sur $\mathbb{R}$

Thm 47: Soit V un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie. Toute forme quadratique q sur V peut s'écrire $q = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 - \sum_{j=1}^q \lambda_j y_j^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q})$ est une famille libre de V^* .

Def 48: Le couple (p, q) est appelé signature de q et est noté $\text{sign}(q)$.

Thm 49: Toute matrice carrée réelle symétrique est congrue à $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour certains p, q .

Prop 50: la signature est entièrement déterminée par la forme quadratique. En effet, si $q \in Q(V)$ et $\text{sign}(q) = (p, q)$ alors, $p = \max \{ \dim F \mid F \subseteq V, q|_F \text{ est non-dégénérée et positive} \}$ et $q = \max \{ \dim F \mid F \subseteq V, q|_F \text{ est non-dégénérée et négative} \}$.

Rem 51: Dans le cas $K = \mathbb{R}$, la signature est donc un invariant total.

Ex 52: • $V = \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = x^2 + xy$, $\text{sign}(q) = (1, 1)$
 • $V = M_n(\mathbb{R})$, $q(A) = \text{tr}(A^2)$, $\text{sign}(q) = (\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$
 • $V = M_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n(\mathbb{R})$ de signature (r, s) , $q(A) = \text{tr}(ASA^t)$, $\text{sign}(q) = (r, s)$

App 53: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Le théorème de Schwarz assure que $\forall a \in \mathbb{R}^2$ la matrice Hessienne $H_f(a)$ est symétrique. Si a est un point critique, on a:
 • Si $\text{sign}(H_f(a)) = (2, 0)$, alors a est un minimum local.
 • Si $\text{sign}(H_f(a)) = (0, 2)$, alors a est un maximum local.
 • Si $\text{sign}(H_f(a)) = (1, 1)$, alors a est un point col.

App 54: À toute conique $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.2x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \}$ on peut associer une forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.
 • Si $\text{sign}(q) = (2, 0)$, alors C est une ellipse.
 • Si $\text{sign}(q) = (1, 1)$, alors C est une hyperbole.
 • Si $\text{sign}(q) = (1, 0)$, alors C est une parabole.

II. 4. Classification sur $\mathbb{F}_q$

Prop 55: $K = \mathbb{F}_q$ avec q impair, $(\mathbb{F}_q^*)^2$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathbb{F}_q^*$.

Thm 56: Soit V un $\mathbb{F}_q$ -ev de dimension finie. Toute forme quadratique q sur V peut s'écrire
 $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$ ou $q = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i^2 + \alpha \lambda_r^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est une famille libre de V , $r = \text{rg}(q)$ et $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus (\mathbb{F}_q^*)^2$.

Rem 57: Dans le cas $K = \mathbb{F}_q$, le rang est le discriminant réduit (forme) invariante totale.

App 58: (Réciprocité quadratique) Soient p et q deux premiers impairs.
 On a $(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2} \frac{(q-1)}{2}}$ où $(\frac{\cdot}{\cdot})$ désigne le symbole de Legendre.

III. Représentation des scalaires

III. 1. Domaine d'une forme quadratique

Def 59: On définit le domaine de $q \in Q(V)$ par $D(q) := \{ a \in K^* \mid \exists x \in V, q(x) = a \}$.

Rem 60: $\forall q \in Q(V)$, $D(q)$ est réunion de classes d'équivalence de K^* modulo $(K^*)^2$.

Prop 61: le domaine est invariant par isomorphisme d'espaces quadratiques.

Def 62: On dit que $q \in Q(V)$ est universelle quand $D(q) = K^*$.

Ex 63: • $K = \mathbb{C}$, toute forme quadratique non-nulle est universelle.
 • $K = \mathbb{R}$, une forme quadratique est universelle si et seulement si sa signature (r, s) vérifie $r \neq 0$ et $s \neq 0$.

• K quelconque, $q: K^2 \rightarrow K$ $(x, y) \mapsto xy$ est universelle.

III. 2. Extension des scalaires

Def 64: Soit L/K une extension. Soit $q \in Q(K^n)$. On étend q à une forme quadratique sur L^n qu'on note q_L en posant $q_L: L^n \rightarrow L$ $x \mapsto q(x)$.

Rem 65: En général, la propriété d'isotropie n'est pas conservée par extension des scalaires. Par exemple, $q(x, y) = x^2 + y^2$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$ mais $q(1, i) = 0$ donc q est isotrope sur $\mathbb{C}$.

Thm 66: Si $L = K(x)$, alors si $q \in Q(K^n)$ est anisotrope, alors q_L l'est aussi.

Cor 67: Si $L = K(x_1, \dots, x_n)$, alors si $q \in Q(K^n)$ est anisotrope, alors q_L l'est aussi.

Thm 68: (Springer) Si L/K est une extension finie de degré n impair, alors si $q \in Q(K^n)$ est anisotrope, alors q_L l'est aussi.

III. 3. Formes quadratiques binaires

Def 69: Une forme quadratique binaire est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ qu'on note (a, b, c) .
 On définit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

Rem 70: $\Delta \equiv b^2 [4]$ donc Δ est b mod 4 la même parité.

Def 71: On dit qu'une f.q.b. (a, b, c) représente un entier $n \in \mathbb{Z}$ si $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax^2 + bxy + cy^2 = n$.

Ex 72: (Théorème des deux carrés) p premier est représenté par $(1, 0, 1)$ si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 [4]$.

Def 73: Deux f.q.b. q et q' sont dites équivalentes si $\exists M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $q' = q \circ M$.

Ex 74: $(a, b, c) \sim (c, -b, a)$ via $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $(a, b, c) \sim (a, b + 2ka, c + bk + ak^2)$ via $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prop 75: Deux f.q.b. équivalentes représentent les mêmes entiers.

Thm 76: Toute f.q.b. positive de discriminant strictement négatif est équivalente à une f.q.b. de la forme (a, b, c) avec $-a < b \leq 0 \leq c$ et $0 \leq b \leq a = c$.

Ex 77: Toute f.q.b. de discriminant -4 est équivalente à $(1, 0, 1)$.

Cor 78: Il existe un nombre fini de classes d'équivalence de f.q.b. positives de discriminant $\Delta < 0$ fixé.

Algorithme de Gauss :

L'objectif est d'écrire une forme quadratique q sous la forme : $q = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une famille libre de V^* .

Si $q = 0$, alors q est de la forme cherchée. Sinon, on écrit:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

- premier cas: L'un des a_i est non nul. Supposons $a_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + \sum_{j \neq 1} a_{1j}x_1x_j + q'(x_2, \dots, x_n) \\ &= a_{11}\left(x_1 + 2x_1\left(\sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{2a_{11}}x_j\right)\right) + q'(x_2, \dots, x_n) \\ &= a_{11}\underbrace{\left(x_1 + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{2a_{11}}x_j\right)^2}_{:= \lambda_1(x_1, \dots, x_n)} - a_{11}\left(\sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{2a_{11}}x_j\right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n) \\ &= a_{11}\lambda_1^2(x_1, \dots, x_n) + q''(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On continue en répétant l'algorithme avec q'' . $L_{q''}$ sera linéairement indépendante des futures formes linéaires que l'on trouvera car q'' ne dépend pas de x_1 .

Deuxième cas : les a_i sont tous nuls et l'indice j ($i \neq j$) est non-nul. Supposons $a_{12} \neq 0$.

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{12} x_1 x_2 + \sum_{j \neq 1} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{j \neq 1, 2} a_{2j} x_2 x_j + q(x_3, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned}
 XY &= \frac{1}{n} \left((x_1 y)^2 - (x_1 - x)^2 \right) \left(\right) \\
 &= \frac{1}{n} a_{12} \left(x_1 + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{2j}}{a_{12}} x_j \right) \left(x_2 + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right) + q''(x_3, \dots, x_n) \\
 &= \frac{1}{n} a_{12} \underbrace{\left(x_1 + x_2 + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{2j}}{a_{12}} x_j + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right)}_{:= \lambda_1(x_1, \dots, x_n)} - \frac{1}{n} a_{12} \underbrace{\left(x_1 - x_2 + \sum_{j \neq 1} \frac{a_{2j}}{a_{12}} x_j - \sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right)}_{:= \lambda_2(x_1, \dots, x_n)} + q''(x_3, \dots, x_n) \\
 &= \frac{1}{n} a_{12} \lambda_1^2(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} a_{12} \lambda_2^2(x_1, \dots, x_n) + q''(x_3, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

On continue en répétant l'opération avec q'' . λ_1 et λ_2 sont linéairement indépendants et le second des xiventes car q' ne dépend ni de x_1 ni de x_2 .

À chaque étape, on diminue strictement le nombre de variables donc l'algorithme s'arrête.

Example: $q: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, y, z, b) \mapsto xy - 2yz - 4yz + 2ab + yz$

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= (x - yz)(y - 2z + 2t) + 8yz^2 - 7yzt \\ &= \frac{1}{4}(x + y - 6yz + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z - 2t)^2 \\ &\quad + 8(yz^2 - 2\frac{7}{16}yzt) \\ &= \frac{1}{4}(x + y - 6yz + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z - 2t)^2 \\ &\quad + 8(yz - \frac{7}{16}t)^2 + \frac{49}{32}t^2 \end{aligned}$$

Referencias:

* Imitation en formes quadratiques (Segrins)

* NH₂G₂ (Gadolinium) (3DEV1)

* Théorie des nombres (Dumortier) (3II.3.)

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

1 Commentaires généraux

Comme tout ce qui se trouve sur Agreg-Maths, ne prenez rien pour argent comptant. Des erreurs sèment sans doute le document. Il n'y a pas de bon ou de mauvais choix pour rédiger un plan, seulement des choix bien ou mal motivés. Une décision devient pertinente au moment où l'on peut s'en convaincre soi-même et en convaincre les autres.

Le plan a été écrit pour être présenté en classe, en temps illimité. Le plan est donc strictement plus long que ce que j'aurais pu faire en conditions réelles.

Je passe vite sur le côté « Orthogonalité » de la leçon car ce n'est pas ce qui me plaît le plus dans les formes quadratiques. A contrario j'entre dans les détails sur la question de la représentation des scalaires dans ma partie III. jusqu'à chatouiller la théorie des nombres dans ma partie III.3. avec les formes quadratiques binaires. Je trouve que c'est intéressant mais ce n'est pas du tout un attendu de la leçon. On peut remplacer ça par plus de géométrie. Attention toute fois à ne pas refaire la leçon 171 sur les formes quadratiques réelles et les coniques. (Mon aversion de la géométrie m'a empêché de faire cette erreur... Au prix de n'avoir aucun développement de la 170 recasable dans la 171 hahahaha.) Il ne faut pas oublier dans cette leçon d'explicitier le penchant matriciel de chaque résultat sur les formes quadratiques.

2 Défense de plan

Ceci n'est pas ma défense mot pour mot mais seulement les idées clefs.

Mon accroche était assez théorique (trop théorique aux yeux du prof devant lequel je l'ai présenté, snif). On cherche à généraliser notre étude des formes linéaires aux polynômes homogènes de degré 2. Malheureusement, en passant au degré 2, on quitte le domaine de l'algèbre linéaire. Cependant via l'introduction de la forme polaire et l'isomorphisme canonique $\text{Bil}(V \times V) \cong \mathcal{L}(V, V^*)$, on se ramène à l'algèbre linéaire. On peut donc associer à une forme quadratique toutes les notions d'algèbre linéaire (écriture dans une base et changement de base, noyau, rang, etc.). Tout ceci se traduit matriciellement : L'étude des formes quadratiques équivaut à l'étude des matrices symétriques. La relation d'équivalence des formes quadratiques correspond à la relation de congruence pour les matrices.

Maintenant qu'on a une relation d'équivalence, on a envie d'établir une classification. On a déjà quelques invariants comme le rang ou le discriminant. Et c'est le concept d'orthogonalité qui va nous aider à réduire nos formes quadratiques. Un résultat fondamental nous assure l'existence d'une base orthogonale et la méthode de Gauss nous donne une façon algorithmique de la trouver explicitement. La suite de la réduction va dépendre du corps. Pour $\mathbb{C}$, le rang est un invariant total. Pour $\mathbb{R}$, c'est la signature. Pour les corps finis, c'est le couple rang et discriminant réduit. Pour d'autres corps, ça peut être plus compliqué (corps de caractéristique 2, $\mathbb{Q}$, etc.). On peut mentionner la loi de réciprocité quadratique comme application de la classification sur les corps finis, ce que je propose comme premier développement.

A ce stade on peut commencer à lister nos applications préférées (coniques, calcul diff, etc.) jusqu'à glisser vers les applications en théorie des nombres via la question de représentation des scalaires. Par exemple on a des théorèmes de conservation de l'anisotropie d'une forme quadratique par extension des scalaires comme le théorème de Springer (mon deuxième développement) ou bien les formes quadratiques binaires quand on s'intéresse à la représentation des entiers. Par exemple le fameux théorème des deux carrés est une question de représentation d'entiers par une forme quadratique binaire.

3 Développements

Mon premier développement est la loi de réciprocité quadratique. L'idée est de dénombrer un ensemble de deux manières distinctes : Une fois par les formes quadratiques et une fois par les actions de groupe. C'est un développement élégant avec un très bon recasage. Je le conseille fortement. Et sérieusement est-ce que quelqu'un à la moindre autre application de la classification des formes quadratiques sur un corps fini ?

Mon deuxième développement est le théorème de Springer. J'aime bien ce développement et il est d'un bon niveau. Ma partie III. et ce développement justifient leur pertinence mutuellement. (C'est-à-dire que sans ma partie III., le développement ferait un peu « sorti de nul part » et sans ce développement, ma partie III. pourrait paraître qu'à moitié assumée...) D'ailleurs faites très attention aux versions de ce développement qu'on trouve sur Agreg-Maths. Beaucoup de versions font de grosses omissions qui nécessitent plusieurs lignes de détails. (Par exemple, soyez au clair sur où est utilisée l'hypothèse d'impairité. C'est plus subtile que ça en a l'air.) Par contre, je n'ai jamais trouvé d'application concrète. Je n'ai aucun exemple de forme quadratique qui admettrait un vecteur isotrope sur une extension de degré impair explicite sans en admettre un explicite sur le corps de base. En fait les extensions de degré impair c'est pas très naturel. Donc à part en le présentant comme une curiosité ou une illustration de notions abstraites (ce qui est déjà pas mal), il est dur à défendre. Je ne le conseillerais qu'aux fans incondtionnés des formes quadratiques (dont vous devriez faire partie).

4 Détails de quelques items

Proposition 23

Exercice intéressant et original. Ça peut faire un développement (éventuellement complété par l'application 24 si c'est trop court). C'est un exercice non-corrigé mais avec des questions subsidiaires dans le Seguin (il me semble?). Les étapes de la preuve sont les suivantes :

1-Ecrire l'invariance par changement de base pour la forme polaire. 2-Remarquer que la forme polaire est nulle sur plein de matrices élémentaires. 3-Via les matrices de permutations, on identifie quatre classes de conjugaison sur lesquelles la forme polaire pourrait être non-nulle. 4-On en élimine l'une des quatre via des manipulations similaires à celles de l'étape 2. 5-On exhibe une relation entre les trois degrés de liberté restants via des bidouilles calculatoires. 6-On exhibe deux formes quadratiques solution linéairement indépendantes (comme $\text{tr}(A^2)$ et $\text{tr}(A)^2$).

Application 24

Cela se fait de façon expéditive en utilisant la proposition 23. Ça peut aussi se faire à la main.

Exemple 34

C'est important d'insister sur cette forme quadratique. On l'aime bien parce qu'on peut lire d'un coup d'oeil tous ses invariants. D'où l'envie de s'y ramener quand on étudie une forme quadratique quelconque. Ca motive l'algorithme de Gauss.

Définition 64

Il y a évidemment écrit n'importe quoi. Il faut utiliser le corollaire 22 pour écrire q comme $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^2$ pour certains $a_i \in \mathbb{K}$ et définir $q_{\mathbb{L}}(x)$ pour $x \in \mathbb{L}$ comme $\sum_{i=1}^n a_i x^2$. Bref on reprend la même expression.

Exemple 77

Donc le théorème des deux carrés nous donne les entiers représentés par plein de formes quadratiques binaires ! Et on peut aller plus loin avec ce qui suit...

Corollaire 78

Ce résultat est le clou du spectacle. Pour déterminer les entiers représentés par une forme quadratique binaire q de discriminant Δ négatif fixé, on n'a qu'à étudier un nombre fini de formes quadratiques binaires ! Une fois qu'on a la réponse pour un représentant de chaque classe d'équivalence, il suffit de réduire q dans sa forme canonique décrite dans le théorème 76. C'est super, non ?

5 Références

J'ai utilisé explicitement le Seguin. Il couvre beaucoup plus que nécessaire donc il faut s'y habituer pour savoir où chaque notion se situe mais il est vraiment très bien. Il énonce le théorème de Springer mais ne fait pas la preuve de la façon qu'on trouve sur Agreg-Maths. Le NH₂G₂ fait très bien le premier développement. Et le Duverney est très bien si jamais il existe une autre personne que moi qui veut parler de formes quadratiques binaires dans cette leçon.