(X,d) est un espace métrique.

I - Définition et premières propriétés

1 - Borel-Lebesgue

Déf 1. [2] (X,d) est dit **compact** si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.

App 2. [2] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de X et l sa limite. Alors l'ensemble $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$ est compact.

Ex 3. [2]

- Tout espace métrique fini est compact.
- $\mathbb{R}$ n'est pas compact. On peut prendre, par exemple le recouvrement $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n[$.

0,1 est un compact de $\mathbb{R}$.

Prop 4. *[2] Un espace métrique compact est borné.*

Prop 5. *[2] (X,d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

Prop 6. *[2]*

- *Une réunion finie de parties compactes est compacte.*
- *Une intersection de compacts est compacte.*

2 - Bolzano-Weierstrass

Théo 7. *[2](Bolzano-Weierstrass) (X,d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E.*

Prop 8. *[2] (X,d) est compact si et seulement si l'une des assertions suivantes sont vérifiées.*

- *Toute suite de X admet au moins une valeur d'adhérence dans E.*
- *Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation.*

3 - Propriétés

Prop 9. *[2]*

- *Si X est compact et si A est une partie fermée de X, alors A est compacte.*
- *Si A est une partie compacte de E, A est fermée et bornée.*

Prop 10. *[2] Un espace compact est complet.*

Prop 11. *[2] Si X est compact et si (x_n) est une suite de E admettant une unique valeur d'adhérence x, alors (x_n) converge vers x.*

Prop 12. *[2] Les parties compactes de tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sont les fermés bornés.*

NB 13. [2] Ce résultat est faux en dimension infinie.

Rappel 14. [2] X est **précompact** si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un recouvrement fini de cet espace par des boules ouvertes de rayon ε.

Prop 15. *[2] Un précompact complet est compact.*

Théo 16 (Tychonoff). *[4] Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des espaces métriques non vides. Posons $X=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$. On a équivalence entre*

(i) X_i compact pour tout $i\in\mathbb{N}$.

(ii) X compact.

II - Continuité sur un compact

1 - Généralités

Prop 17. *[5] L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

App 18. [5] Toute bijection continue définie sur un compact est un homéomorphisme.

Théo 19 (Heine)**.** *[2] Soit (Y, d') un espace métrique. Supposons que X est compact. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors f est uniformément continue.*

Théo 20 (Dini)**.** *[4] Supposons que X est compact et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

(i) (f_n) est croissante ie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in X$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

(ii) (f_n) converge simplement vers f

Alors (f_n) converge uniformément vers f.

2 - Théorème des bornes

Prop 21. *[2] Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue avec X est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

App 22 (Rolle)**.** [2] Soit $f : [a, b] \to$ une application vérifiant :

(i) f est continue sur $[a, b]$

(ii) f est dérivable sur $]a, b[$

(iii) $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Déf 23 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** [1] L'ensemble $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leqslant 1\}$, où q est une forme quadratique définie positive, est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ centré en l'origine.

Théo 24 (Développement 1)**.** *[1] Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Cor 25 (Développement 1)**.** [1] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$. Il existe alors un produit scalaire associé à une forme quadratique q tel que $G \subset \mathcal{O}(q)$ où

$$\mathcal{O}(q) = \{u \in GL(E) : q \circ u = q\}$$

3 - Théorème d'Ascoli

Soit (X, d) un espace métrique compact. Notons $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps, nous noterons $\mathcal{C}(X)$.

Déf 26. [3] Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite **équicontinue en un point** $x_0 \in X$ si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

Elle est dite **équicontinue** sur X si elle est équicontinue en tout point de X.

Rappel 27. [5] Soit A une partie de X. A est dite **relativement compact** si $\overline{A}$ est compact.

Théo 28 (Ascoli)**.** *[3] Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

4 - Théorèmes de Stone Weierstrass

Déf 29. [3] Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ telle que pour tout $(x, y) \in X$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ pour lequel $h(x) \neq h(y)$ est dite **séparante**.

Déf 30. [3] Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dite **réticulée** si pour tout couple $(f, g) \in H$, $\sup(f, g) \in H$ et $\inf(f, g) \in H$.

Théo 31 (Stone-Weierstrass réel)**.** *[3](Développement 2) Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Cor 32 (Théorème de Weierstrass)**.** [2] Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions de polynômes.

Déf 33. On dit que H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ est **auto-conjuguée** si pour tout $h \in H$, la fonction $\overline{h}$ définie par $\overline{h}(x) = \overline{h(x)}$ est un élément de H.

Théo 34 (Stone-Weierstrass complexe)**.** *[3] Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Théo 35. *[2] Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométrique.*

Théo 36. *[2] Si X est compact et f une application vérifiant*

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe.

Cex 37. [2] $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

III - Espaces vectoriels normés

Théo 38. *[5] Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors toutes les normes sur E sont équivalentes. Pour la métrique définie par l'une quelconque de ces normes toute partie fermée et bornée est compacte.*

App 39. Pour q un forme quadratique définie positive, $\mathcal{O}(q)$ est compact

Déf 40. [5] Un espace topologique séparé E est dit **localement compact** si tout point possède un voisinage compact.

Théo 41. *(Riesz)[5] Un espace normé est localement compact si et seulement si sa dimension est finie.*

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini, 2010.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse.* Ellipses, 2008.

[3] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.

[4] Hervé Queffélec. *Topologie.* Dunod, 2012.

[5] Claude Tisseron. *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels.* Hermann Paris, 1985.