

# 153: Valeurs propres, vecteurs propres, Calculs exacts ou approchés d'éléments propres.

153

Soit  $E$  un espace vectoriel ( $K$  corps quelconque à priori) de dimension finie  $n \geq 1$ .

## 1. Éléments propres d'un endomorphisme.

### A) Valeurs propres / espaces propres. [ROT], [GOU]

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Def°1**: On dit que  $\lambda \in K$  est valeur propre de  $u$  si  $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .

Rq:  $\lambda$  est val. propre de  $u$  si  $\exists x \neq 0$  tq  $u(x) = \lambda x$ .

**Notat°**: On note  $\text{Sp}_n(u)$  l'ensemble des val. propres de  $u$ .

**Def°2**: Si  $\lambda$  est val. propre de  $u$ , on dit que  $x \in E$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$  si  $x \neq 0$  et si  $u(x) = \lambda x$ .

**Def°3**: Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , alors le sous-espace  $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$  est appelé espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Propositi°4**:  $\lambda \in K$  est val. propre de  $u$  si, et seulement si  $u - \lambda \text{id}$  est non inversible.

Rq: Ce résultat est faux en dim. infinie.

**Propositi°5**: Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , alors  $E_\lambda$  est stable par  $u$ .

**Propositi°6**: Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des val. prop de  $u$  distinctes  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Alors, les sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$  sont en somme directe.

**Exemple 7**: (projecteur). Un projecteur admet 2 val. propres 0 et 1 dont les ss esp. propres sont  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$ .

### B) Polynômes annulateurs. [GOU], [BER]

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Proposition 8**: Soit  $P \in K[X]$ . Si  $P(u) = 0$ , alors les val. p de  $u$  sont incluses dans l'ens. des racines de  $P$ .

**Contre-exemple 9**:  $P = X(X-1)$  annule l'identité sans que 0 soit val. propre de  $\text{id}$ .

Rq: Il vient donc que  $\#\text{Sp}(u) < +\infty$ .

**Def°10**: On appelle annulateur de  $u$  et on note  $\text{Ann}(u)$  l'ensemble  $\text{Ann}(u) = \{P \in K[X] / P(u) = 0\}$ .

**Propositi°12**:  $\text{Ann}(u)$  est un idéal principal de  $K[X]$  non nul. Il existe donc un unique polynôme unitaire  $\mu_u \in K[X]$  appelé polynôme minimal de  $u$  tel que  $\text{Ann}(u) = \mu_u K[X]$ .

**Def°13**: Le polynôme caractéristique d'une matrice  $M \in \text{Mat}(n, K)$  est le polynôme  $\chi_M \in K[X]$  tel que  $\chi_M = \det(XI_n - M)$ .

**Lemme 14**: Si  $M$  et  $M'$  sont 2 matrices semblables, alors

$$\chi_M = \chi_{M'}$$

On peut alors définir.

**Def°15**: On appelle polynôme caractéristique de  $u$  le polynôme caractéristique de la matrice de  $u$  dans n'importe quelle base.

**Th16**: (Caley-Hamilton).  $\chi_u(u) = 0$ . En particulier,  $\mu_u \mid \chi_u$ .

**Propositi°17**: Les propositions suivantes sont équivalentes:

①  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

②  $\lambda$  est racine de  $\chi_u$ .

③  $\lambda$  est racine de  $\mu_u$ .

**Notat°**: Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on note  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_u$ .

**Propositi°18**: Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ .

**Propositi°19**: Soit  $F$  un ss espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $\chi_u \mid \chi_F$ .

## II. Réduction des endomorphismes.

### A) Diagonalisation. [BER], [ROT]

**Def°20**: Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est diagonalisable si il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres.

Rq: Cela revient à dire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale. Il existe donc  $P \in \text{GL}_n(K)$  et  $D = \text{diag}(d_i)$  au  $\text{Sp}(u) = \{d_i\}$  tel que  $P^{-1}uP = D$ .

**Th 21**: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- ①  $u$  est diagonalisable
- ②  $E = \bigoplus_{d \in \text{Sp}(u)} E_d$ .
- ③  $\chi_u$  est scindé et  $\forall d \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim(E_d) = m_d$ .
- ④ le polynôme  $\prod_{d \in \text{Sp}(u)} (X-d)$  annule  $u$ .
- ⑤ Il existe  $P \in \text{Ann}(u)$  scindé simple
- ⑥  $u$  est scindé simple
- ⑦  $\mu_u = \prod_{d \in \text{Sp}(u)} (X-d)$ .

**Corollaire 22**: Si  $u$  possède  $n$  val. propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable.

**Exemple 23**: Un projecteur est diagonalisable sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ .

**B) Trigonalisation**. [R07] [Gr]

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Def 24**: On dit que  $u$  est trigonalisable si il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire.  
 Rq: Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base et  $T$  la matrice de  $u$  dans une base de trigonalisation, alors il existe  $P \in GL_n(K)$  tel que  $T = P^{-1}AP$ . On dira donc qu'une matrice  $A$  est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

**Proposil 25**: Si  $A \in M_n(K)$  est trigonalisable, alors les val. propres de  $A$  sont exactement les termes diagonaux de  $T$ .

**Th 26**:  $u$  est trigonalisable sur  $K$  si, et seulement si,  $\chi_u$  est scindé sur  $K$ .

**Corollaire 27**: Sur  $\mathbb{C}$ , toute matrice est trigonalisable.

**Corollaire 27**: Soit  $A \in M_n(K)$  trigonalisable. Si  $\text{Sp}(A) = \{d_1, \dots, d_r\}$ , alors,  $\text{Tr}(A) = \sum d_i$  et  $\det(A) = \prod d_i$ .

**III. Valeurs propres de matrices particulières.**

**A) Matrices compagnons**. [R07]

**Def 29**: Soit  $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ . On appelle matrice compagnon associée à  $P$  la matrice  $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$ .

**Proposil 30**: Le polynôme  $P$  est le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice compagnon  $C_P$ .

**Th 31**:  $C_P$  est diagonalisable si, et seulement si,  $P$  est scindé à racines simples. Dans ce cas, en notant  $P = \prod_{i=1}^n (X-d_i)$ , on a  $WC_P W^{-1} = D$  où  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  et

$$W = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & \dots & d_1^{n-1} \\ 1 & d_2 & \dots & d_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_n & \dots & d_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Exemple 32**: (th. de Kronecker). Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire à racines non nulles et de module  $\leq 1$ . Alors les racines de  $P$  sont des racines de l'unité. DE V 4. a

**B) Matrices d'ordre fini**.

**Proposil 33**: Soit  $G$  un sous groupe fini de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Alors toute matrice  $M \in G$  est diagonalisable avec val. propres de module  $\leq 1$ .

**App 34**: (lemme de Serre). Soit  $G$  un sous groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Alors  $\forall m \geq 3$ ,  $G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  est un monomorphisme de groupe injectif. DE V 4. b.

**C) Matrices symétriques** [R07]

Edesigne ici un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Proposil 35**: Soit  $u \in S(E)$ . Si  $F$  est un rev stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

**Proposil 36**: Si  $u \in S(E)$ , alors  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$ .

**Proposil 37**: Si  $u$  est sym., alors ses val. propres sont réelles.

Proposit° 38: (Th. Spectral). Toute matrice symm. est diagonalisable en base orthogonale.

Proposit° 39:  $A \in S_n^+(n)$  (resp.  $A \in S_n^{++}(n)$ ) si et seulement si  $Sp(A) \in \mathbb{R}_+$  (resp.  $Sp(A) \in \mathbb{R}_+^*$ ).

#### D) Matrices nilpotentes. [BER]

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme.

Th 40: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- ①  $u$  est nilpotent
- ②  $u^n = X^n$  où  $n$  est l'indice de nilp.
- ③  $X_u$  est scindé et  $Sp(u) = \{0\}$ .
- ④  $X_u = X^n$ .

Supposons que  $\text{car}(K) = 0$ .

Th 41: Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors  $A$  est nilpotente si et seulement si  $\text{Tr}(A^k) = 0 \ \forall k \geq 1$ . DEV 2

### IV. Recherche des valeurs propres.

#### A) Localisation des val. propres. [ROT]

On suppose  $n \geq 2$ .

Notat°: Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on pose  $L_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  et  $L = \max_{1 \leq i \leq n} L_i + |a_{ii}|$ .  $C_j = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$  et  $C = \max_{1 \leq j \leq n} C_j + |a_{jj}|$ .

Th 42: Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  une val. propre de  $A$ . Il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$ .

Exemple 43: Les valeurs propres de  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont les  $(2 \cos(\frac{k\pi}{n}))_{1 \leq k \leq n}$ .

Corollaire 44: Pour toute val. propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on a:  $|\lambda| \in \text{Max}(L, C)$ .

Def 45: On dit que  $A \in \mathbb{C}$  est à diagonale strictement dominante si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .

Corollaire 45: Une matrice  $A$  à diagonale strictement dominante est inversible.

#### B) Rayon spectral. [ROT]

Def 46: Le rayon spectral de  $u \in \mathcal{L}(E)$  est le réel  $\rho(u) = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$ . (On adapte pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ).

Th 47: Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on a  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ .

Th 48: Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors:

① Pour toute norme matricielle provenant d'une norme vectorielle on a  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

Th 49: Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- ①  $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .
- ② Pour toute val. initiale  $x_0$ , la suite  $(x_k)$  définie par  $x_{k+1} = Ax_k$  converge vers le vecteur nul.
- ③  $\rho(A) < 1$ .
- ④  $I_n - A$  est inversible et  $\sum A^k$  converge de somme  $(I_n - A)^{-1}$ .