

Soit E un espace vectoriel sur un corps K (a priori quelconque). On note $n = \dim(E) < +\infty$.

1. Diagonalisation.

A) Valeurs propres / espaces propres [ROT] [G00]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Def°1 : On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de u si $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Re : λ est v.p. de u si, et seulement si, existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Notat° : On note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des v.p. de u .

Def°2 : Si λ est une v.p. propre de u , on dit que $x \in E$ est un vecteur propre associé à λ si $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.

Def°3 : Si λ est une v.p. propre de u , alors $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ est appelé espace propre associé à la valeur propre λ .

Proposil°4 : $\lambda \in K \in \text{Sp}(u)$ si, et seulement si, $u - \lambda \text{id}$ est non inversible.

Re : En dimension infinie, ce n'est plus vrai.

Proposil°5 : Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors E_λ est stable par u .

Proposil°6 : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des v.p. p. de u distinctes p.à p. Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Exemple 7 : (Projecteur) Un projecteur admet 2 valeurs propres, 0 et 1 et on a $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E_1 \oplus E_0$.

B) Polynômes annulateurs. [G00], [BER] p. 948

Proposil°8 : Soit $P \in K[X]$. Si $P(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont incluses dans les racines de P .

Contre exemple 9 : $P = X(X-1)$ annule l'identité sans que 0 soit v.p. propre de P .

Def°10 : On appelle annulateur de u et on note $\text{Ann}(u)$ l'ensemble $\text{Ann}(u) = \{P \in K[X] / P(u) = 0\}$.

Proposil°11 : $\text{Ann}(u)$ est un idéal principal de $K[X]$ non nul. Il existe donc un unique polynôme unitaire μ_u appelé polynôme minimal de u tel que

$$\text{Ann}(u) = \mu_u K[X].$$

Lemme 12 : (de décomposi° des noyaux) Soit $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ premiers entre eux 2 à 2. On a alors

$$\text{Ker}\left(\prod_{i=1}^r P_i(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

Def°13 : Le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in M_n(K)$ est le polynôme $\chi_M \in K[X]$ tel que $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Lemme 14 : Si M et M' sont deux matrices semblables, alors $\chi_M = \chi_{M'}$.

On peut alors définir le polynôme caractéristique de u le polyn. caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base.

Def°15 : On appelle polynôme caractéristique de u dans n'importe quelle base.

Th 16 : (Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$. En particulier, $\mu_u \mid \chi_u$.

Proposil°17 : Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u . En particulier, $\# \text{Sp}(u) < +\infty$.

Re : les racines de χ_u sont aussi les v.p. de u .
Notat° : Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u .

Proposil°18 : Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Proposil°19 : Soit F un des espaces de E stable par u . Alors, $\chi_{u|_F} \mid \chi_u$.

Exemple 20: (Matrice compagnon). Si $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on appelle matrice compagnon de P la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ On a alors } \chi_{C_P} = P.$$

C) Diagonalisation: Définitions et critères. [BER] [ROT] [Gou] p. 170

Def 22: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si il existe une base de E dans laquelle sa matrice représentative de u est diagonale.

Re: Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres, c'est-à-dire que $\text{Mat}_B(u) = P^{-1}DP$ avec $P \in GL_n(K)$, D diag.

Th 23: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

① u est diagonalisable

② $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$

③ χ_u est scindé et, $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Corollaire 24: Si u possède n val. propres distincts, alors u est diagonalisable.

Th 24: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

① L'endomorphisme u est diagonalisable.

② Le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u .

③ Il existe $P \in \text{Ann}(u)$ scindé simple.

④ μ_u est scindé simple.

⑤ $\mu_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Corollaire 25: Soit F un sous espace vectoriel de E stable par u . Si $u|_F$ est diagonalisable, alors $u|_F$ est diagonalisable.

Th 26: Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endo. de E diagonalisable. Pour qu'il existe une base commune de diagonalisation, il faut et il suffit que $\forall i, j \in I$, $u_i u_j = u_j u_i$.

Exemple 27: Un projecteur est diagonalisable avec une matrice dans une bonne base de E (en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Proposition 28: On prend $K = \mathbb{C}$. Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors, si $M \in G$, M est diagonalisable et ses val. propres sont des modules ≤ 1 .

Propos 29: Soit $A = P^{-1}DP \in M_n(K)$ avec $P \in GL_n(K)$, D diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}D^kP$ avec $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}$.

Appl 30: Th. de Kronecker. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et non nulles et de module ≤ 1 . Alors les racines de P sont des racines de l'unité.

Corollaire: (Lemme de Serre). Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Alors, $\forall m \geq 3$, la réduction $G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est une monomorphisme de groupe injectif. DEV 1

II. Endomorphismes symétriques. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dim. finie $n \geq 1$. [ROT] p. 732, [Gou] p. 256

A) Définitions [ROT] p. 732, [Gou] p. 256

Def 31: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$ c'est-à-dire si $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Notat: $S(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^* = u\}$.

Th 32: Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit symétrique, il faut et il suffit que sa matrice dans une base orthonormée de E soit symétrique.

Th 33: Soit $u \in S(E)$. Si F est un sous espace de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

B) Réduction des endo. symétriques - [ROT] p. 734

Soit $u \in S(E)$.

Proposil° 34: Les valeurs propres de u sont toutes réelles.

Proposil° 35: Les espaces propres de u sont orthogonaux 2 à 2.

Proposil° 36: Soit λ une val. propre de u . Soit e_λ un vecteur propre unitaire associé à λ . Alors $H = \text{Vect}(e_\lambda)$ est stable par u et $u|_H$ est symétrique.

th 37: (Spectral) Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 37: Toute matrice sym. réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée. $\exists$: il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq PAP^t soit diagonale (${}^tP = P^{-1}$).

Rq: Ce th. n'est pas valable sur $\mathbb{C}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

C) Matrices symétriques (définies) positives. [ROT] p. 734

Def° 39: $u \in S(E)$ est dit symétrique positif (resp. défini positif) si il est symétrique et si $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. $\langle u(x), x \rangle > 0$). On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$).

th 40: Soit $u \in S(E)$. Alors, $u \in S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) si et seulement si, $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Def° 41: On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive (resp. définie positive) si A est sym. et si $\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle X, AX \rangle \geq 0$ (resp. $\langle X, AX \rangle > 0$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposil° 41: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

D) Rayon spectral et homéomorphisme. [ROT]
Munissons $M_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle associée à la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$. Notons cette norm $\| \cdot \|$.

Def° 42: Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle rayon spectral la quantité $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$.

Proposil° 43: Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \rho(A)$.

th 44: Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\|{}^tAA\|} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

th 45: L'exponentielle $\exp: S_n \rightarrow S_n^{++}$ réalise un homéomorphisme. DEV 2

[Ca8]