

151 : Sous espace stable par un endomorphisme ou une famille d'endomorphisme d'un ev. de dim finie. Appl° 151

Sait E un espace vectoriel de dim finie $n \geq 1$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note χ_u le polyn. caractéristique et m_u le polyn. minimal.

1. Sous espaces stables.

A) Définitions

Def° 1 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 2 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, Alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par u .

Exemple 3 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$ Si u stabilise toutes les droites alors u est une homothétie.

Proposil° 4 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$ et F stable par u . Alors, u induit par restriction un endomorphisme $u_F : F \rightarrow F$.

Proposil° 5 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v. stable par u . Alors $\chi_F = \chi_u$ et $m_F | m_u$.

Proposil° 6 : Sait $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Cor. 7 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$. $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u pour tout $P \in K[x]$.

Rq : En particulier, les sous espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u .

B) Dualité et stabilité. [Gau], [Rou]

Def° 8 : On dit que des éléments $u \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont orthogonaux si $\langle u, \varphi \rangle = \varphi(u) = 0$.

Def° 9 : ① Sait $A \subset E$. On note $A^\perp = \{ \varphi \in E^* / \forall x \in A, \langle x, \varphi \rangle = 0 \}$. $A^\perp$ est appelé orthogonal de A .

② Sait $B \subset E^*$ on note $B^\circ = \{ u \in E / \forall \varphi \in B, \langle u, \varphi \rangle = 0 \}$. B° est appelé orthogonal de B .

Thio ① Sait $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de formes linéaires de rang n . Alors :

$F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$ est de dim $n - p$.

② Si F est un sous espace de E , alors il existe une famille $(\varphi_i) \subset E^*$ de rang $n = n - m$ telle que $F = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(\varphi_i)$.

Def° 11 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle transposé de u l'appl° $t_u : F^* \rightarrow E^*$ définie par : $t_u(\varphi) = \varphi \circ u$.

Proposil° 12 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$. F de E est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par t_u .

C) Philosophie [BIA] p. 48

Proposil° 13 : Sait $u \in \mathcal{L}(E)$ Sait F stable par u . Alors, Sait $(f_1, \dots, f_d)$ une base de F que l'on complète. Alors on a :

$$\text{Mat}_n(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_p(u_F) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Si maintenant $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ où chaque E_i est stable par u , et si e est la base concaténée des bases e_i des E_i alors

$$\text{Mat}_E(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{E_1}(u_{E_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{Mat}_{E_n}(u_{E_n}) \end{pmatrix}$$

On voit donc l'importance des sous-espaces dans la réduction.

II. Réduction des endomorphismes.

A) Lemme de décomposi^o des noyaux.

th 14: Soit $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ premiers entre eux et EAL . Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\text{Ker}(\prod_{i=1}^n P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u))$.

Rq: Ce lemme est particulièrement intéressant lorsque $\prod_{i=1}^n P_i(u) = 0$ car on obtient alors une décomposi^o de E en somme directe de sous-espaces stables par u .

th 15: (Cayley - Hamilton). $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$.

Rq 16: Les 2 derniers résultats permettent donc de décomposer E en somme directe de sous-espaces: Si $\chi_u = \prod (x - \alpha_i)^{k_i}$

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}((u - \alpha_i \text{id})^{k_i})$$

B) Diagonalisat^o. [R07] p. 682

Def 17: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Def 18: On dit que $A \in \text{Mn}(K)$ est diagonalisable si il existe une matrice semblable à une matrice diagonale.

th 19: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- ① u est diagonalisable
- ② $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - d_i \text{id})$ où $\text{Sp}(u) = \{d_1, \dots, d_p\}$.
- ③ $\sum_{i=1}^p \dim(\text{Ker}(u - d_i \text{id})) = n$
- ④ χ_u est scindé sur K de racines $d_1, \dots, d_p \in K$, chaque d_i étant de multiplicité $\dim(\text{Ker}(u - d_i \text{id}))$.
- ⑤ il existe P scindé simple tel que $P(u) = 0$.
- ⑥ u est scindé simple sur K .

proposi^o 20: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et que F est un sous-espace stable par u , alors $u|_F$ est diagonalisable.

th 21: (diagonalisat^o simultanée). Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisat^o dans E pour la famille (u_i) , il faut et il suffit que $\forall i, j \in I$, $u_i u_j = u_j u_i$.

C) Trigonalisat^o.

Def 22: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

th 23: $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable sur K si et seulement si, son polynôme χ_u est scindé sur K .

Corollaire 24: Si $K = \mathbb{C}$, alors tout endo. est trigonalisable.

Corollaire 25: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable et si F est un sous-espace stable par u , alors $u|_F$ est trigonalisable.

th 26: Si (u_i) est une famille d'endo. trigonalisables qui commutent 2 à 2, alors il existe une base commune de trigonalisat^o.

III. Endomorphismes remarquables.

A) Réduction des endomorphismes nilpotents [R07]

Def 27: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. On dit que q est l'indice de nilpotence de u .

Proposil 28: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans une base β de E alors la matrice de t_u dans la base duale β^* est tA .

Lemme 29: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilp. d'ordre q , alors t_u est nilp. d'ordre q .

Lemme 30: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilp. d'ordre q . Pour tout vecteur $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $B_{u,x} = (u^k(x))_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre et $F = \text{Vect}(B_{u,x})$ est stable par u .

Lemme 31: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilp. d'ordre q . Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est l'orthogonal G dans E de $H = \text{Vect}(\varphi, t_u(\varphi), \dots, (t_u)^{q-1}(\varphi))$ sont stables par u avec $E = F \oplus G$.

Th 22: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilp. d'ordre $q \geq 1$, il existe une base $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ telle que tous les $E_i = \text{Vect}(B_i)$ soit stables par u et la matrice de la restriction de u à E_i est $J_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(K)$ où $q_i = \dim(E_i)$.

B) Endomorphismes semi-simples [Gau] p. 236

Def 33: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si pour tout ser F de E stable par u , il existe un supplémentaire S de F stable par u .

Proposil 34: Si π_u est irréductible, alors u est semi-simple.

Th 35: u est semi-simple si, et seulement si, π_u est sans facteur

Rem: Si $K = \mathbb{C}$, alors u est semi-simple si, et seulement si u est diagonalisable.

C) Endomorphismes normaux

On suppose ici $K = \mathbb{R}$ et on se donne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note alors u^* l'adjoint de u .

Def 36: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u u^* = u^* u$.

Th 37: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Soit F est un ser de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Th 38: Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sous-espace vectoriel F de E de $\dim \leq \omega/2$ stable par u .

Lemme 39: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe des sous-espaces $P_1, \dots, P_n$ de $\dim \leq \omega/2$, 2 à 2 orthogonaux, stables par u et $E = \bigoplus_{j=1}^n P_j$.

Lemme 40: Si $\dim(E) = 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, alors

(i) Si u admet une v.p. nulle, alors u est diagonalisable dans une bon.

(ii) Sinon par toute base orthonormée B de E , la matrice de u dans B est $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $b \neq 0$.

Th 41: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une bon de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\Delta = \begin{pmatrix} D \oplus R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_n \end{pmatrix} \quad R_h = \begin{pmatrix} a_h & -b_h \\ b_h & a_h \end{pmatrix} \quad D_j \text{ est diagonale} \\ b_h \neq 0.$$