

Sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1 Dimension des espaces vectoriels

1.1 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1.1. [GOU1] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est libre si pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i.$$

Avoir en tête la condition équivalente

Définition 1.2. Une famille liée est une famille qui n'est pas libre.

Exemple 1.3. la famille $(1, \sqrt{3})$ est liée dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel mais est libre dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. [GOU1] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est génératrice si $\text{Vect}(e_i) = E$. Autrement dit, si pour tout $x \in E$, il existe $J \subset I$ fini et $(\lambda_j)_{j \in J} \subset \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$.

Exemple 1.5. la famille (1) est génératrice dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel mais n'est pas génératrice dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Théorème 1.6. [GOU1] Si un espace vectoriel E est engendré par une famille finie de n vecteurs, alors toute famille libre a au plus n éléments.

Bien insister sur le fait que ce théorème est à la base de la théorie de la dimension.

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une base de E est une famille libre et génératrice. Cela revient à dire que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base.

Exemple 1.8. — la famille (1) est une base dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel mais n'est pas une base dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. (une base de ce dernier est $(1, i)$).

— Dans $\mathbb{K}^n$, on appelle base canonique la base $((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))_{i \in [a, b]}$.

1.2 Théorie de la dimension

Définition 1.9. On dit qu'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.

Théorème 1.10. (Base extraite). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à 0 de dimension finie. De toute famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de E , on peut extraire une base de E .

L'hypothèse non réduit à 0 est essentielle dans la preuve.

Théorème 1.11. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors,

1. E possède des bases et celles-ci comportent toutes un nombre fini de vecteurs.
2. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Définition 1.12. On appelle dimension d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et on note $\dim(E)$ le cardinal commun à toutes les bases de E .

Théorème 1.13. (caractérisation des bases.) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Alors,

1. Toute famille libre a au plus n vecteurs. Si elle en a n , c'est une base.
2. Toute famille génératrice à au moins n vecteurs. Si elle en a n , c'est une base.

Théorème 1.14. (base incomplète). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en une base de E .

Théorème 1.15. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie. On peut trouver des familles libres à n vecteurs pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vrai en dimension infinie mais utilise le lemme de Zorn.

Théorème 1.16. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, $E = F$.

Bien insister ici pendant la présentation du plan en disant que cela simplifie les démonstrations en montrant une inclusion plus égalité des dimensions.

TROUVER DES EXEMPLES

Théorème 1.17. (Formule de Grasseman). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Théorème 1.18. (Existence d'un supplémentaire). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F possède un supplémentaire.

Proposition 1.19. (Caractérisation des supplémentaires). Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces de E . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$.
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0\}$.
3. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
4. $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

2 Applications linéaires et Rang

2.1 Applications linéaires

Théorème 2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors,

1. f est injective si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.
2. f est surjective si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice.

Remarque 2.2. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire surjective avec E de dimension finie, alors F est de dimension finie.

Corollaire 2.3. (Caractérisation des isomorphismes). Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors f est un isomorphisme entre E et F si, et seulement si, f transforme une base de E en une base de F .

Corollaire 2.4. Soit E et F deux espaces de même dimension finie n . Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors, f est bijective si et seulement si, elle est injective, si et seulement si, elle est surjective.

Exemple 2.5. Polynôme interpolateurs de Lagrange.

On prend cet exemple car il est utile dans le développement

Remarque 2.6. Faux en dimension infinie : l'application $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 2.7. Soit E, F deux espaces de dimension finie. Alors, E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.

Corollaire 2.8. Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Définition 2.9. Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels et $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- On appelle image de f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble image de f .
- On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $f(x) = 0$.

Proposition 2.10. Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous espaces vectoriels.

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.11. On dit qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est de rang fini si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. On note alors $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Proposition 2.12. (Supplémentarité). Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image.

dans la prop précédente on ne fait aucune hypothèse sur la dimension. Insister donc que en dimension finie on obtient le théorème du rang.

Théorème 2.13. (Théorème du rang). Soit E de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ linéaire. On a alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

Remarque 2.14. ATTENTION : Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire, on a pas en général $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Avoir pour cette remarque un contre exemple et aussi des CNS.

2.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.15. On appelle rang d'une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 2.16. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

2.4 Rang d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

Proposition 2.17. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finie p, n respectivement. Alors, on a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 2.18. Le rang de M est $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\text{Im}(M))$.

Proposition 2.19. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice associée dans n'importe quel couple de bases.

Proposition 2.20. (Caractérisation du rang). Le rang d'une matrice A est la taille maximale d'une matrice carré extraite de A inversible.

Théorème 2.21. Le rang est invariant par extension de corps.

Théorème 2.22. [DEV1]. (Dimension du commutant). On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec M . On a $\mathcal{C}(M) = \mathbb{K}[M]$ si, et seulement si, $\pi_u = \chi_u$.

3 Application de la dimension finie

3.1 Dualité

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Le dual de E est l'ensemble des formes linéaires sur E . On le note E^* .

Proposition 3.2. Soit E un espace vectoriel de dimension n . E^* est de dimension n .

Proposition 3.3. Étant donné $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E , la famille (e_i^*) où pour $1 \leq i, j \leq n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, est une base de E^* appelée base duale de la base (e_i) .

Avoir en tête le contre exemple ici en dimension infini.

Proposition 3.4. Soit E un espace vectoriel de dimension n . Alors E est canoniquement isomorphe à son bidual E^{**} .

3.2 Topologie des espaces normés

Théorème 3.5. (Equivalence des normes). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension finie.
2. Toutes les normes sur E sont équivalentes.
3. Quelle que soit la norme choisie sur E , toute forme linéaire sur E est continue.
4. Quelle que soit la norme choisie sur E , la boule unité de E est compacte.
5. Quelle que soit la norme choisie sur E , les compacts de E sont les fermés bornés.

Corollaire 3.6. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Corollaire 3.7. Tout endomorphisme de E est continu.

3.3 Réduction des endomorphismes normaux

Définition 3.8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est normal si, $uu^* = u^*u$. On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes normaux de E .

Théorème 3.9. (Théorème de réduction). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$: \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où } D_p \text{ est diagonale de taille } p \text{ et}$$

$$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad b_k \neq 0.$$

Corollaire 3.10. [DEV2]. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Alors $\mathcal{N}(E) = \mathcal{P}(E)$ où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E dont l'adjoint est un polynôme en u .