

I. Fonctions monotones.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial.

A) Définitions. [RDO] p. 118

Def° 1: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $-f$ est croissante (resp. strictement croissante).

Def° 2: On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone (resp. strictement monotone) si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exemple 3: $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ est monotone.

Propositi° 4: Une applicati° monotone f est injective si et seulement si elle est strictement monotone. Elle induit alors une bijection de I sur $f(I)$ dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie que f .

Propositi° 5: L'ensemble des applications croissantes est stable par somme, produit par un scalaire $+$, produit et composé. Rq: Cet ensemble n'a pas une structure d'espace vectoriel.

Th 6: (Limite monotone). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Soit $a \in [-\infty, +\infty]$ adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ (resp. $D \cap]-\infty, a[$). Alors, f admet une limite finie ou infinie à droite (resp. à gauche) au point a .

Corollaire 7: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Soit a adhérent à $D \cap]-\infty, a[$. Alors f admet une limite finie à droite au point a si et seulement si f est majorée sur $D \cap]a, +\infty[$.

B) Régularité des fonctions monotones [RDO].

Th 7: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Alors, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exemple 9: Soit X une variable aléatoire réelle. Si F_X désigne la fonction de répartition de X , alors, le nombre de points de discontinuité de F_X est $\leq \# \{a \in \mathbb{R} / p(X=a) > 0\}$ est au plus fini.

Th 10: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que $f(I)$ soit intervalle.

Corollaire 11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et monotone strict. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J .

Th 12: Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f: I \rightarrow J$ est un homéomorphisme, alors f est strictement monotone.

Th 13: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable à droite sur I . Alors:

- f est constante si, et seulement si, $\forall t \in I, f'_d(t) = 0$.
- f est croissante si, et seulement si, $\forall t \in I, f'_d(t) \geq 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $\forall t \in I, f'_d(t) \leq 0$.

C) Suites de fonctions. [Gou]

Propositi° 14: Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes convergant simplement vers une fonction f . Alors f est croissante.

Th 15: (Diri). Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f_n \rightarrow f$ simplement, alors $f_n \rightarrow f$ unif.

Th 16: (Comparaison série-intégrale). Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et cont. p. morcelée. Alors, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

[Gou] p. 238

[Gou] p. 212.

II. Fonctions convexes...

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial.

A). [ROMAR]... d'une var. réelle.

Def° 17: On dit que f est convexe si $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$,
 $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
 On dira que f est concave si $-f$ est convexe.

Def° 18: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble $E = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} / y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposil° 19: Une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, son épigraphe est un convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposil° 20: Une applicat° $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, par tout couple (A, B) de points du graphe de f , avec $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ $a < b$, la courbe représentative de f sur $[a, b]$ est en dessous du segment $[AB]$.

Exemple 21: ① $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est convexe.

② $x \mapsto |x|$ est convexe.

Proposil° 22: Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors, $f = \varphi \circ g$ est convexe.

Rq: Si φ n'est pas croissante, le théorème ne subsiste pas.

Th 23: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I . Alors f est continue sur I .

Th 24: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I et convexe sur I , alors f est convexe sur I .

Th 25: (Inégalité des 3 pentes). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Notons $p(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ par $x \neq y$ la pente de la droite $(\frac{x}{f(x)}, \frac{y}{f(y)})$.

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:

① f est convexe.

② Par tout $x < y < z$ dans I , $p(x, y) \leq p(x, z) \leq p(y, z)$.

③ $\forall a \in I$, la fonc° $\tau_a: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Th 26: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est

elle est à la fois convexe et concave.

Th 27: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, elle est convexe et majorée.

Th 28: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors, f est dérivable à

chaque et à gauche en tout point de I et on a par $a < b$ dans I , $f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$.

Th 29: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, f est convexe sur I si, et seulement si, elle est continue et dérivable à droite sur I de dérivée droite croissante.

Th 30: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:

① f est convexe sur I ② f' est croissante sur I

③ C_f est située au dessus de ses tangentes.

Th 31: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois dérivable sur I , alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geq 0$.

Exemple 32: $\sin$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $-\sqrt{\cdot}$, $-t^n$.

Exemple 33: (Fonc° Γ d'Euler). DEV 1

13) ... de plusieurs variables réelles.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.
On peut encore définir la notⁿ de convexité.

Th 34: f est convexe si, et seulement si, $\forall (x, y) \in U$, la
foncⁿ $\varphi_{x,y}: t \mapsto f(x + t(y-x))$ est convexe.
sur $[0,1]$.

Th 35: Supposons f de classe C^1 sur U . Alors, les propriétés
suivantes sont équivalentes:

① f est convexe sur U .

② $\forall x, y \in U, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$.

③ $\forall x, y \in U, f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$.

Proposilⁿ 36: Si f admet est convexe et si différentiable
en $a \in U$ et si $\nabla f(a) = 0$, alors f admet en a un
minimum global.

III. Applications.

A) Inégalités de Convexité (ROTTAR), (APPJ).

Proposilⁿ 37: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$

Appⁿ 38: (Lemme de Borel-Cantelli) Soit (A_n) une
famille d'événements indépendants. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(A_n) = +\infty$,
alors, $p(A_n, \text{ i.s.}) = 1$.

Proposilⁿ 38: $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \frac{2}{\pi} x < \sin(x) < x$.

Proposilⁿ 39: (Hölder).

$$\left| \sum x_i y_i \right| \leq \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

B) Processus de Gallen-Watson.