

07.EJ
0378

1. Existence et unicité d'extrema:

Sat (E) un espace vectoriel normé, U un ouvert de E . Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Def 1: On dit que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ admet en $a \in U$:

- un minimum local (resp. un max. local) si il existe un voisinage ouvert V de a dans U tel que: $\forall x \in V, f(x) \geq f(a)$ (resp. $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$).
- un minimum local strict (resp. un max. local strict) si il existe un voisinage ouvert V de a tel que: $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) > f(a)$ (resp. $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$).
- un extremum si elle admet un max. ou un minimum en a .

Dans le cas où $V = U$, on dit que l'extremum est global.

A) Optimisat° des fonctions continues sur un compact.

Propositi° 2: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si U est compact, alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Contre-exemple 3: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée mais n'atteint pas ses bornes.
 $x \mapsto \arctan(x)$

Corollaire 4: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admet en $\|x\| \rightarrow +\infty$ un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 5: Supposons F de dim finie. Soit $F \subset E$ un fermé. Alors, $\forall x \in E, \exists y \in F$ tel que $\|x - y\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Contre-exemple 6: Si E est de dimension infinie, alors ce n'est pas toujours le cas: $E = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1)$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un fermé pour lequel la distance n'est pas atteinte.

Rq: il n'y a pas unicité dans le

Rq: Nous voyons cela maintenant comment

B) Optimisat° dans un Hilbert. [HIR], [POT]

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Th 7: (Project° sur un convexe fermé). Soit C une partie convexe, fermée, non vide de H . Alors, $\forall x \in E$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point, appelé project° de x sur C , est noté $p_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante:

$y \in C$ et $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$

Rq: Dans le cas où $C = F$ est un sous-espace de H de dimension finie, alors $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Th 8: (Représentat° de Riesz). L'appliquat° $E \rightarrow E$: $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie bijective. **DEV 1**

Rq: On a déjà vu au contre-ex. 6 que sur un Banach, la distance à un fermé convexe n'est pas forcément atteinte.

① Si H est strictement préhilbertien, alors le résultat ne subsiste que si F est un sev de dim finie.

Corollaire 9: L'appliquat° $x \mapsto p_C(x)$ est 1-Lipschitzienne.

Propositi° 10: Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H , alors, p_F est un opérateur de E sur F .

Corollaire 11: ① Pour tout sev fermé F de $E, F \oplus F^\perp = E$.

② Pour tout sous-espace F de $E, F^\perp = \{0\}$.

③ F est dense si, et seulement si, $F^\perp = \{0\}$.

Propositi° 12: Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$.

[POT]

[HIR]

[POT]

[HIR]

[HIR]

[HIR]

II. Problème d'extrema par les fonctions diff.

A) Problèmes d'extrema libre. [Rou] + [Rou] + [Rou]

On se place sur $E = \mathbb{R}^n$ et on se donne $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U .

Proposil° 13: Si f admet en $a \in U$ un extremum local, alors $Df(a) = 0$.

Def° 14: On dit que $a \in U$ est un point critique de f si $Df(a) = 0$.

Contre-exemple 15: La réciproque du th. précédent est fautive. La fonc° $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $f'(0,0) = 0$ mais n'admet pas en $(0,0)$ d'extremum local.

Rq: Si U n'est pas ouvert le résultat de la prop. devient faux. Considérons $U =]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant que f est 2 fois différentiable sur U .

Th 16: Soit f admet un min. local (resp. un maximum local) en $a \in U$, alors $Df(a) = 0$ et la forme bilinéaire symétrique $D^2f(a)$ est positive (resp. négative).

Th 17: Supposons f de classe C^2 sur U . Soit $a \in U$ un point critique de f . Si la forme quadratique $D^2f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), la fonction f admet alors un minimum local strict (resp. un maximum local strict) en a . Si la forme quadratique $D^2f(a)$ est de signature (p,q) avec $p > 0$ et $q > 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a .

Exemple 18: (Cas des fonc° de 2 variables)
On pose $u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $v = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

On a alors $D^2f(a,b) = \begin{pmatrix} u & \Delta \\ \Delta & v \end{pmatrix}$ dont $A = \begin{pmatrix} u & \Delta \\ \Delta & v \end{pmatrix}$ est sa matrice dans la base canonique. Si (a,b) est un point critique de f , alors
- $\Delta^2 - ut > 0$ et $u > 0$ (resp. $u < 0$) alors f présente un min. local strict en (a,b) (resp. max. local strict).
- $\Delta^2 - ut > 0$, ... alors il n'y a pas d'extremum en (a,b) .

B) Problèmes d'extremes liés. [Rou] + [Rou] + [Rou]

Th 19: (Extremes liés). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une applicat° de classe C^1 . Soit $g_1, \dots, g_r: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Soit $a \in \Gamma$. Soit $f|_{\Gamma}$ admet en a un extremum relatif et que la famille $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a)$.

App° 20: Maximum du déterminant de Vandermonde sur la boule unité.

Posons $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \det(x_1^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$
Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité.
et (H): $\sum x_i^2 = 1$
Posons $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sum x_i^2 - 1$.
Alors V admet un maximum sur B atteint en un point de $S \cap H$.

C) Optimisation des fonctions convexes. [Rou] + [Rou] + [Rou]

Def° 21: On dit que f est convexe sur U si $\forall x,y \in U$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Proposil° 22: Si f est différentiable sur U , alors f est convexe si et seulement si, $\forall x,y \in U$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$.

Proposil° 23: Si f est 2 fois différentiable sur U , alors f est convexe si et seulement si, D^2f est une forme quadratique positive.

th 24: Soit f une fonction convexe sur U . Si f est différentiable en a et si $Df(a) = 0$, alors f admet en a un minimum global sur U .
et on peut également obtenir la condition du second ordre suivant:

th 25: Soit f une fonction 2^{e} fois différentiable sur un ouvert convexe U . Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(h, h) > 0 \forall h \in U$, alors f admet en a un minimum global.

III. Méthode des moindres carrés [Amo]

Soit $Ax = b$, ($A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^m$) un système d'équations linéaires.
La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonction $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$.

th 26: Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{C}^m$.

① le problème des moindres carrés $\inf_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2^2$ possède au moins une solution.

② Ces solutions sont caractérisées par $A^*Ax = A^*b$, appelé équation normale.

③ Si x et x' sont deux solutions, alors $Ax = Ax'$. la solution est donc unique si la matrice A est de rang n .

④ Rq: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, on sait que $\nabla f(x) = 0$ lorsque x réalise le min. de f sur $\mathbb{R}^n$.
Prenez pour $f: x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$.
Son gradient est $\nabla f(x) = 2A^*(Ax - b)$. L'équation $\nabla f(x) = 0$ est précisément l'équation normale.

Exemple 27: Régression linéaire.

Soit $(x_i, y_i)_{i \in [1, m]} \in \mathbb{R}^2$. on cherche alors $\inf_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^m (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$.
 $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

[Amo]: Luca Amodei: Analyse numérique matricielle