

I. Différentielles et dérivées partielles.

A) Fonctions différentiables : défini° et exemples - [Rou]

Soit E, F 2 espaces normés sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $U \subset E$ un ouvert. Soit $f: U \rightarrow F$.

Def° 1: On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ si il existe une applicat° linéaire continue $L: E \rightarrow F$ telle que $f(a+h) - f(a) = L(h) + R(h)$ où le reste $R(h)$ est en $o(\|h\|)$.

Propos° 2: Si elle existe, l'applicat° L est unique. On l'appelle différentielle de f au point a .

Notat°: $Df(a)$.

Exemple 3: Si $E = \mathbb{R}$, alors $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
et $Df(a): \mathbb{R} \rightarrow F$
 $h \mapsto h f'(a) \in F$.

Exemple 4: Si f est linéaire, alors f est différentiable en tout point de E et $Df(a) = f \forall a \in E$.

Exemple 5: Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, alors si f est différentiable en a , il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ appelé gradient de f en a tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Propos° 6: $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $X, H \in M_n(\mathbb{R})$, $D \det(X)(H) = \text{Tr}(\text{Com}(X)H)$. [Rou] p. 50.

B) Propriétés de la différentielle.

Soit E, F 2 espaces normés, $U \subset E$ un ouvert et $f: U \rightarrow F$,
et $g: V \subset F \rightarrow G$ où V est un ouvert.

Propos° 7: Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a .

Propos° 8: Si f et h sont différentiables en $a \in U$, alors, $\forall \lambda \in K$, $\lambda f + h$ est différentiable en a et $D(\lambda f + h)(a) = \lambda Df(a) + Dh(a)$.

Propos° 9: On suppose f différentiable en a et g différentiable en $b = f(a)$. On a alors :
 $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

th 10: (Inégalité de la moyenne). Soit $[a, b] \subset U$.

Supposons que
① f est différentiable sur U .
② $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $\|Df(x)\| \leq k$.
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k \|b - a\|$.

Def° 11: On dit que f est de classe C^1 sur U si elle est différentiable en tout point de U et si l'application $U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue.
 $x \mapsto Df(x)$

Exemple 12: Si $E = F = \mathbb{R}$, alors on retrouve bien que f est C^1 si, et seulement si f est dérivable et $x \mapsto f'(x)$ est continue.

Def° 13: On dit que f est un C^1 difféomorphisme de l'ouvert U sur un ouvert V de F si f est bijective, de classe C^1 sur U et si l'application réciproque f^{-1} est C^1 sur V .

C) Dérivées directionnelles et dérivées partielles. [Gour] p.

On se donne toujours $f: U \rightarrow F$ comme précédemment.

Def° 14: Soit $a \in U$ et $v \in E$. Si la fonction à variable réelle $\varphi: t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, f est dite dérivable en a selon le vecteur v . On note alors $f'_v(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$.

Propos° 15: Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est dérivable en a selon tout vecteur v de E et on a $Df(a)(v) = f'_v(a)$.

Précisons nous dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.

Def° 16: Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, si f est dérivable en a selon e_i , on dit que f admet une i^{e} dérivée partielle en a et on note $f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Exemple 17: Si $F = \mathbb{R}$, alors on a $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

Proposition 18: Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles en a et $\forall h \in E$, $Df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

[Rou]
p. 104

Contre-exemple 19: $f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées partielles nulles à l'origine mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Th 20: Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ il faut et il suffit que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $1 \leq i \leq n$ en tout point de U et que ces dérivées partielles soient continues sur U .

Proposit° 21: Prenons $F = \mathbb{R}^p$. Notons $f = (f_1, \dots, f_p)$. Alors la matrice de la différentielle de f en a dans les bases canoniques et appelée jacobienne de f en a est:

$$\text{Jac } f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Proposit° 22: Si f est en $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V , alors $\forall x \in U$, $Df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exemple 23: $x \mapsto x^3$ n'est pas en $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

II. Différentielles d'ordre supérieur.

A) Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (et $\mathcal{C}^k$) [Rou]

On se donne encore $f: U \rightarrow F$.

Def° 24: On dit que f est $\mathcal{C}^2$ sur U si elle est $\mathcal{C}^1$ sur U et si $x \mapsto Df(x)$ est différentiable sur U de différentielle continue.

Notat°: $D^2f(a) = D(Df)(a)$.

Def° 25: On dit que f est $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Rq: Si $F = \mathbb{R}^p$, $D^2f(a)$ définit une applicat° bilinéaire $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Regardons le cas $F = \mathbb{R}$:

Proposition 26: Si f est 2 fois différentiable en $a \in U$, alors on a

$$D^2f(a): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (h, k) \mapsto \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j.$$

Th 27 (Schwarz): Si f est 2 fois différentiable en $a \in U$, alors $\forall i, j, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Corollaire 27: La matrice $\text{Hess } f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ appelée matrice hessienne de f en a est symétrique.

B) Formules de Taylor [Rou]

On se donne encore $f: U \rightarrow F$.

Notat°: Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on note $D^k f(a)(h)^k = D^k f(a)(h, \dots, h)$.

Th 28 (Taylor-Young): Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a $f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = o(\|h\|^k)$.

Th 30 (Taylor avec reste intégral): Supposons f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U . Si le segment $[a, a+h]$ est contenu dans U , alors,

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k &= \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Th 31 (Inégalité de Taylor-Lagrange): Soit $K \subset U$ un compact convexe. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall a \in K, \forall h$ tel que $a+h \in K$, $\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k\| \leq C \|h\|^{k+1}$.

III. Étude locale.

A) Théorèmes d'inversion [Rou].

Th 32 (Inversion locale): Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $a \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\text{Jac } f(a)$ est inversible. Il existe alors un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur $W = f(V)$. On a de plus $Df|_V^{-1}(y) = Df(x)^{-1}$ où $y = f(x)$.

Exemple 33: $f: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mais n'est pas un difféomorphisme global.

Th 34 (Réduct° des formes quadratiques).

Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Soit $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^t A_0 A$.

Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall A \in V, A = \psi(A) A_0 \psi(A)$.

Lemme 35: (de Monté). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. Supposons que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique $D^2f(0)$ soit non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe φ un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme entre 2 voisinages ouverts de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^n \varphi_k(x)^2$.

DEV 1

Th 36: (Inversion globale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que $\forall x \in U, Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exemple 37. $\varphi:]0, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
 $(x, y) \mapsto (xy, x(1-y))$

est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.

Exemple 38: $\phi:]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
 $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.

Rajasthan dev. Fonctions 777 monotone.

B) Fonctions implicites.

Th 39: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Soit $(a, b) \in U$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b)$ inversible. Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport à y : il existe un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et $D_y f(x, y)$ inversible $\forall (x, y) \in V \times W$ et il existe une unique application $\varphi: V \rightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V tel que $(x, \varphi(x)) \in V \times W$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ ssi $(y = \varphi(x), x \in V)$.

Exemple 40: Considérons $f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. On a $D_y f \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Prenons $(a, b) = (0, 1)$. On a alors $V =]-1, 1[, W =]0, +\infty[, y = \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$.

IV. Recherche d'extremums.

A) Extremum fibre [R07] p. 378

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 41: Soit $a \in U$. Si f admet un extremum local en a , alors $Df(a) = 0$.

Contre exemple 42: La réciproque du théorème précédent est fautive. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arctique $f(x) = 0$ mais n'admet pas en 0 d'extremum local.

Th 43: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. Supposons f $\mathcal{C}^2$ en a . Si f admet un min. local (resp. max local) en a , alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est positive (resp. négative).

Th 44: Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. Si la forme quadratique $D^2f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet en a un minimum local strict (resp. max. local strict). Si la forme quadratique $D^2f(a)$ est de signature $p, q > 0$, alors a n'est pas un extremum local de f .

B) Extrema liés.

Th 45: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $p \in]2, +\infty[$. Soit $\varphi = (\varphi_k)_{1 \leq k \leq p}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $K = \{x \in U / \varphi(x) = 0\}$ supposé non vide. Si la restriction de f à K admet un extremum local en $a \in K$ tel que $D\varphi_1(a), \dots, D\varphi_p(a)$ soient linéairement indépendants, il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ uniques tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i D\varphi_i(a)$.

Exemple 46: L'application $V: x \mapsto \det(x_{ij}^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ atteint son maximum sur $B(c, 1)$ et ce max est atteint sur $S(c, 1) \cap H$ où $H: \sum x_i = 0$.

DEV 2