

Sauf mention du contraire, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Séries numériques. [ROM], [Des]

Def°1: Soit $(u_n)_n \subset K$. On appelle série numérique de terme général (u_n) la série suite notée $\sum u_n$ définie par $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelé somme partielle de la série $\sum u_n$ d'ordre n .

Def°2: La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge. Dans ce cas, cette limite est appelée somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Def°3: On dit qu'une série diverge si elle ne converge pas.

Def°4: Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre n de la série la suite (R_n) définie par $n \in \mathbb{N}$ par $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Proposit°5: Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. [Hav]

Contre-exemple 6: $\ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ Mais $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge.

Def°7: On dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement si (u_n) ne tend pas vers 0.

Proposit°8: L'espace $K^{\mathbb{N}}$ des suites numériques est un espace vectoriel.

Th 9: (Lien suite-série). L'opérateur de dérivat° discrète

$\Delta: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}$
 $(u_n) \mapsto (u_n - u_{n-1})_{n \geq 0}$ avec convent° que $u_{-1} = 0$.
 est un isomorphisme d'espace vectoriel et on a:

$\Delta^{-1}: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}$
 $(u_n) \mapsto \sum u_n - u_{n-1}$

Corollaire 10: $(u_n) \subset K$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n - u_{n-1}$ converge.

Exemple 11: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Proposit°12: (Critère de Cauchy). La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, N, \forall p \in \mathbb{N}^*, |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \varepsilon$.

Exemple 13: $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Def°14: On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Proposit°15: Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Contre-exemple 16: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument. [Hav]

II. Séries à termes positifs. [ROM], [Des]

Ici, on prend $K = \mathbb{R}$ et on se donne $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

A) Comparaisons des séries à termes positifs.

Proposit°17: $(S_n = \sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ est croissante et on a la dichotomie suivante:

- ① Soit (S_n) est majorée et alors $\sum u_n$ converge.
- ② Soit elle n'est pas majorée et alors $S_n \rightarrow +\infty$ par (1).

Notat°: On note $\sum u_n < +\infty$ dans le cas 1 et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ par (2).

Th 18: Si $u_n \leq v_n$ pour n assez grand, alors:

- ① Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = +\infty$.
- ② Si $\sum v_n < +\infty$, alors $\sum u_n < +\infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Exemple 19: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Th 20: Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et:

- ① En cas de convergence, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- ② En cas de divergence, on a $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

th 21: Si $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$) alors :
 ① Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n < +\infty$ et on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
 (resp. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$).

② Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$ et $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
 (resp. $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$).

Contre-exemple 22: $\left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \forall n \geq 1$ mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$
 tandis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

th 23: (Comparaison série-intégrale). Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ a même nature que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et on a en cas de convergence $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq R_n \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt$.

B) Séries de références [No Ref]

Proposition 24: $\sum q^n$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Proposition 25: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 26: $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Proposition 27: ① Si il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $\sum u_n < +\infty$
 ② Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Lemme 28: Soit $\alpha > 1$. Alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Appt° 29: Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **DEV 1.**

C) Critères de convergence des séries à termes positifs.
 Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}_+$.

th 30: (Critère de Cauchy). Si $(u_n)^{1/n} \rightarrow \ell$, alors :

① si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

② si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

③ si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exemple 31: $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} \rightarrow 1$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1$.

th 32: (Critère de d'Alembert). Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ alors :

① si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

② si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

③ si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

th 33: (Raabe - Duhamel). Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum u_n$ converge par $\alpha > 1$ et diverge par $\alpha < 1$.

III. Séries à terme général quelconque.

A) Transformation d'Abel.

Soit $(a_n), (b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $A_{-1} = 0$.

th 34: on a $\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$.

th 35: (Critère d'Abel). Soit $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ décroissante et telle que $\alpha_n \rightarrow 0$ et soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \geq 0}$ est bornée. Alors $\sum \alpha_n u_n$ converge et on a $|R_n| \leq 2 \|S_n\|_\infty \alpha_{n+1}$.

B) Séries alternées.

Def° 36: On dit qu'une série réelle est alternée si son terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite réelle de signe constant.

th 37: Si $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ est telle que $\alpha_n \rightarrow 0$ en décroissant, alors $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge et $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k\right| \leq \alpha_{n+1}$.

Exemple 37: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas absolument.

Def° 39: Si $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument, on dit que la série est semi-convergente.

C) Produit de convolution. [R01T]

Defo 40: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Le produit de convolution (ou produit de Cauchy) de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

Th 41: (Convergence du produit de Cauchy dans le cas positif).

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries à termes positifs et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy. (1) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergents, alors $\sum w_n$ cv et on a $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

(2) Si l'une des 2 séries est divergente, alors $\sum w_n$ diverge.

Th 42: Le produit de Cauchy de 2 séries Absolument convergentes est A. convergent et (*) est encore vraie.

Exemple 43: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$ Normal.

IV. Séries entières. [R01T].

Defo 44: On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \subset \mathbb{K}$.

lemme 45: (AbcP) Si il existe $z_0 \in \mathbb{K}^*$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée alors $\sum a_n z^n$ cvt $\forall z \in D(0, |z_0|)$.

Defo 46: On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ l'élémt de $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\sup \left\{ \frac{1}{|a_n|^{1/n}} \right\}$ (ou $(a_n)^{1/n}$ est borné).

Proposil 47: Si $R \neq 0$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument en $D(0, R)$ et diverge sur $\mathbb{K} \setminus \overline{D(0, R)}$.

Proposil 48: (1) Si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{\ell}$. (D'Alembert)

(2) Si $|a_n|^{1/n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $R = \frac{1}{\ell}$ (Cauchy).

Exemple 49: $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Th 50: Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $\sum b_n z^n$ de rayon de conv. R' .

Alors (1) si $a_n = O(b_n)$, alors $R \geq R'$.

(2) si $a_n \sim b_n$, alors $R = R'$.

Th 51: Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de cv R , alors $f: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est analytique sur $D(0, R)$ et on a $\forall z \in D(0, R)$, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Appl 52: (Places libres dans un parking). On considère des voitures de longueur 2 et un parking de n places de longueur 1. A chaque fois qu'une voiture arrive, elle se gare en 2 places restantes $(i, i+1)$ où i est choisi selon une loi unif. parmi les places restantes. On continue jusqu'à ce qu'aucune autre voiture ne puisse se garer. Alors le nombre moyen de places restantes à la fin du processus dans un parking de n places est équivalent à $\frac{n}{e}$ qd $n \rightarrow \infty$.

DEVZ