I - Généralités

1 - Définitions et exemples

Déf 1. [2](p.38) Espaces connexes

Déf 2. [2](p.39) Parties connexes

Ex 3. [2](p.39) $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.

2 - Premières propriétés et stabilités

Prop 4. *[2](p.39) Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ une application continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.*

App 5. [2](p.47) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Cex 6. [3](p.296) Attention, l'image réciproque d'un connexe par une application continue n'est pas nécessaire connexe, il suffit de considérer la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Prop 7. *[2](p.39) Un espace métrique (E,d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0,1\}$ est constante.*

App 8. [2](p.41) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Prop 9. *[2](p.40) Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E,d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Prop 10. *[2](p.40) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes telle que, pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$. Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Prop 11. *[2](p.40) Soit $(E_1,d_1), ..., (E_n,d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*

3 - Composantes connexes

Déf 12. [2](p.41) Soit (E,d) un espace métrique. On considère sur (E,d) la relation

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C)$$

C'est une relation d'équivalence.

Déf 13. [2](p.41) Composante connexe.

4 - Connexité par arcs et applications

Déf 14. [2](p.42) Chemin

Déf 15. [2](p.42) Connexe par arcs

Théo 16. *[2](p.42) Un connexe par arc est connexe.*

App 17. [6](p.48)(Développement 1) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Déf 18. [2](p.42) Ligne brisée

Déf 19. [2](p.42) Connexe par lignes brisées

NB 20. [2](p.42) Une partie connexe par lignes brisées est connexe par arcs.

Théo 21. *[2](p.42) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé. Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées.*

NB 22. [2](p.43) On en déduit que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

II - Applications

1 - Analyse réelle

Théo 23. *[2](p.41) Théorème des valeurs intermédiaires.*

Théo 24. *[2](p.78) Théorème de Darboux*

Théo 25. *[4](p.106) Soit E et F normés et $f : U \to F$ différentiable sur un ouvert U de E. Si U est connexe et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.*

2 - Analyse complexe

Déf 26. [5](p.242) Fonctions holomorphes

Déf 27. [5](p.247) Indice

Théo 28. *[5](p.247) La fonction Ind est une fonction à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω. (Ω est le plan complexe privé du support du chemin.)*

Théo 29. *[4](p.175)(Développement 2) Théorème du point fixe de Brouwer*

Théo 30. *[5](p.250) Formule de Cauchy*

Théo 31. *[1](p.53) Principe des zéros isolés*

Théo 32. *[1](p.54) Principe du prolongement analytique*

Théo 33. *[1](p.67) Théorème des résidus*

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* HK, 2005.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse.* Ellipses, 2008.

[3] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses, 2007.

[4] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2003.

[5] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 2009.

[6] Maxime Zavidovique. *Un max de maths.* Calvage et Mounet, 2013.