

Leçon 241 : Suites et Séries de Fonctions

Exemples et Contre-exemples

astrid.thollet

February 2026

Contexte : X est un ensemble non vide, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach.
Si définie, on note $\|f\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$

1 Modes de Convergences

1.1 Suites de fonctions

Définition 1 (Convergence simple). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers E .
On dit (f_n) converge simplement sur X ssi, $\forall x \in X, \exists l_x \in E, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_x$.
On dit alors que $f_n \xrightarrow{CVS} f$ où $f : x \mapsto l_x$.

Exemple 2. Si $f_n(x) = x^n$, (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur $[0, 1]$.

Définition 3 (Convergence uniforme). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f fonctions de X vers E .
On dit que (f_n) converge uniformément sur X ssi
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\|_E < \varepsilon$.

Proposition 4. $f_n \xrightarrow{CVU} f$ ssi les $f_n - f$ sont bornées apcr, et $\|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple 5. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0, 1]$.

Proposition 6. Soient (f_n) et f fonctions de X vers E .
 $f_n \xrightarrow{CVU} f \implies f_n \xrightarrow{CVS} f$.

Exemple 7 (Contre-exemple). La réciproque est fausse, il n'y a pas CVU dans l'exemple 2. On a une réciproque partielle :

Proposition 8 (Premier théorème de Dini). On suppose que X est un espace topologique compact et $E = \mathbb{R}$. Si (f_n) et f sont continues, et (f_n) est monotone, alors :

$f_n \xrightarrow{CVS} f \implies f_n \xrightarrow{CVU} f$.

Proposition 9 (Critère de Cauchy uniforme). Soient (f_n) et f fonctions de X vers E .
On suppose que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, p > N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f_p(x)\|_E < \varepsilon$,
ou de manière équivalente $\|f_n - f_p\|_{\infty, X} \xrightarrow{n, p \rightarrow \infty} 0$ (définies apcr).

Alors, $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

Remarque 10. Autrement dit, l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées est complet pour $\|\cdot\|_{\infty}$

Exemple 11 (Application). Si (P_n) suites de polynômes, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors f est un polynôme.

1.2 Séries de fonctions

Soient (f_n) une suite de fonctions de X vers E .

Définition 12 (Séries de fonctions). On appelle série des f_n , notée $\sum_{n \geq 0} f_n$, la suite des fonctions sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 13 (Convergence). $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément).

Définition 14 (Somme et Reste d'une série). Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (ou mieux), on pose

- $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ la somme de la série.
- $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Exemple 15. $f_n : x \mapsto x^n$ alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$. On a alors $R_n : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Proposition 16. Si $\sum f_n$ converge simplement, alors $\sum f_n \xrightarrow{CVU} S \iff R_n \xrightarrow{CVU} 0$

Proposition 17. Si $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément), alors (f_n) converge simplement (resp. uniformément) vers 0.

Définition 18 (Convergence Normale). $\sum f_n$ converge normalement si, les f_n sont bornées sur X et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, X}$ converge.

Proposition 19. $\sum f_n$ converge normalement $\implies \sum f_n$ converge uniformément $\implies \sum f_n$ converge simplement.

Définition 20 (Convergence absolue). On dit que $\sum f_n$ converge absolument si $\forall x, \sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|_E$ converge.

Proposition 21. La convergence absolue entraîne la convergence simple.

Remarque 22. C'est faux en dehors d'un espace complet.

Exemple 23 (Contre-exemple). $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
La série converge simplement et uniformément sur $[0, 1]$, mais pas normalement, ni absolument.

1.3 Séries entières

On se place dans $X = \mathbb{C} = E$.

Définition 24 (Série Entières). Une série de fonctions est une série entière si les f_n sont de la forme $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

Exemple 25. $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} z^{2n+1}$ sont des séries entières.

Définition 26 (Rayon de Convergence). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, on définit son rayon de convergence par $R = \sup\{r > 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty]$.
Le disque $D(0, R)$ est alors appelé disque de convergence de la série.

Proposition 27. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans le disque de convergence.

2 Régularité et inversion

2.1 Continuité et Inversion de limites

On suppose X partie de F espace vectoriel normé.

Proposition 28 (Conservation de la continuité). *Si (f_n) (resp $\sum f_n$) converge uniformément vers f , et si pour tout n , f_n est continue en $a \in X$, alors f est continue en $a \in X$.*

Exemple 29. *L'ex 2 donne une limite non continue, il n'y a donc pas convergence uniforme.*

Exemple 30 (Application). *Les séries entières sont continues sur leur disque ouvert de convergence.*

Proposition 31 (Stone-Weierstrass). *Toute fonction continue sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales.*

Proposition 32. *On suppose $f_n \xrightarrow{CVU} f$. Soit $a \in \overline{X}$ tel que pour tout n , il existe $l_n \in E$ tel que $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n$. Alors (l_n) converge et f admet une limite en a .*

De plus, $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Exemple 33 (Contre-exemple). *Sans la CVU, le théorème n'est plus valable : voir ex 2*

Proposition 34 (Corollaire). *Soit $\sum f_n$ une série convergeant uniformément sur X . Soit $a \in \overline{X}$ tel que pour tout n , il existe $l_n \in E$ tel que $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n$.*

Alors $\sum l_n$ converge et la fonction somme S admet une limite en a .

De plus, $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

2.2 Sur un espace mesuré

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Proposition 35 (Lemme de Fatou). *Pour toute suite (f_n) de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors $\underline{\lim} f_n$ est mesurable et $\int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$.*

Exemple 36 (Cas d'inégalité stricte). $X = [0, 2]$ et $f_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1,2]}$

Exemple 37 (Hypothèse de positivité). $f_n = -\mathbb{1}_{[n,2n]}/n \xrightarrow{CVU} 0$, mais $\forall n, \int f_n = 1$.

Proposition 38 (Théorème de Convergence Monotone). *Soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurables positive sur X , à valeurs dans $[0, +\infty]$, sa limite simple est mesurable et on a $\int(\lim f_n) = \lim(\int f_n)$.*

Proposition 39 (Théorème de Convergence Dominée). *Soit (f_n) suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers f sur X , à valeurs réelles ou complexes. Si il existe g intégrable sur X tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors f est intégrable et $\int |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, en particulier $\int f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f$.

Définition 40 (Espaces L^p). *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on définit L^p comme $F/\mathcal{R}$ où F est l'ensemble des fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\int_X |f|^p < +\infty$, et $\mathcal{R}$ la relation d'égalité presque partout.*

On le munit de la norme $\|\cdot\|_p : f \mapsto \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}$.

Si $p = \infty$ on définit L^∞ comme les fonctions essentiellement bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \notin \Omega_f} |f(x)|$, où f est bornée sur $X - \Omega_f$ avec Ω_f de mesure nulle.

Proposition 41 (Riesz-Fischer - DEV 1). *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, L^p est complet.*

2.3 Dérivation et intégration sur $\mathbb{R}$

On suppose $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 42 (Dérivation). *On suppose que (f_n) (resp $\sum f_n$) converge simplement vers f , et que pour tout n , f_n est dérivable sur I .*

Si (f'_n) (resp $\sum f'_n$) converge uniformément sur I alors :

1. (f_n) (resp $\sum f_n$) converge uniformément sur I
2. f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ (resp $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$).

On suppose dans la suite que les f_n sont intégrables sur le compact $[a, b]$.

Proposition 43. *Si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Proposition 44 (Corollaire : intégration termes à termes). *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors sa somme S est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^{b+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx \text{ (avec la somme des intégrables convergente).}$$

Exemple 45 (Séries Entières). *On peut dériver et intégrer termes à termes les séries entières, le rayon de convergence est alors préservé.*

Exemple 46 (Contre-exemple). *La convergence uniforme est nécessaire : soit $f_n : x \mapsto n^2 x e^{-nx}$ sur $[0, 1]$.*

$$f_n \xrightarrow{CVS} 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 0 \text{ mais } \forall n, \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^n t e^{-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

3 Application en Probabilités

Soit (X_n) une suite de v.a.r. , et X une v.a.r.

Définition 47 (Convergence en Loi). $X_n \xrightarrow{\text{Loi}} X$ si et seulement si, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 48 (Fonction caractéristique). *Pour Y un variable aléatoire réelle, on pose $\Phi_Y : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itY})$ la fonction caractéristique de Y .*

Proposition 49 (Théorème de Lévy - DEV 2). $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff \Phi_{X_n} \xrightarrow{CVS} \Phi_X$