

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

astrid.thollet

February 2026

$(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie.
On fixe $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide.

1 Différentiabilité

Définition 1. Soit $f : U \rightarrow F$ et $x_0 \in U$.

On dit que f est différentiable en x_0 s'il existe $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ linéaire telle que

$$\forall x \in U, f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Dans ce cas, ℓ est unique et on la note $df_{x_0} := \ell$, la différentielle de f en x_0 .

Définition 2. Soit $f : U \rightarrow F$. f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U et on note alors $df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, F), x_0 \mapsto df_{x_0}$

Exemple 3. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = M^2$, alors f est différentiable en tout point et $df_M(H) = HM + MH$ pour tout $H, M \in M_n(\mathbb{R})$.

Définition 4. Soit $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on définit les dérivées partielles de f en x_0 par

$$\partial_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{e}_i) - f(x_0)}{t}$$

lorsque cette quantité converge.

Exemple 5. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y$.

Proposition 6. Toute fonction différentiable en un point est continue en ce point. De plus, elle y admet des dérivées partielles.

Exemple 7. La réciproque est fautive : on peut admettre des dérivées partielles mais ne pas être différentiable.

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ admet des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'y est pas différentiable.

Proposition 8 (Corollaire). Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable en $x_0 \in U$, on a pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$df_{x_0}(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$$

d'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x - x_0)_i + o(\|x - x_0\|) \quad (DL1)$$

Proposition 9. L'ensemble des applications différentiable en un point x_0 est une algèbre (stable par combinaison linéaires et par produits) et $d : f \mapsto df$ est linéaire.

De plus, $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$.

Exemple 10. Les fonctions multinomiales sont différentiables en tout point. Les fonctions rationnelles sont différentiables sur tout ouvert U tel que le dénominateur ne s'annule pas sur U .

Proposition 11 (Extension). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow F$ dérivable. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\tilde{U} := \{x \in \mathbb{R}^n / x_i \in I\}$ et $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow F, x \mapsto \varphi(x_i)$.

Alors $\tilde{\varphi}$ est différentiable en tout point de $\tilde{U}$ et $d\tilde{\varphi}(h) = \varphi'(x_i)h_i$.

Proposition 12 (Règle de la chaîne). Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^p \rightarrow G$ différentiables, vérifiant $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f$ est différentiable et on a

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}.$$

En particulier, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

où $f = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_p)$.

Exemple 13. On peut calculer le laplacien (voir II.2) en coordonnées polaires.

Proposition 14. Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable et U connexe. Si $df = 0$ alors f est constante sur U .

2 Fonctions $\mathcal{C}^k$

2.1 Différentiation d'ordre 1

Définition 15. Soit $f : U \rightarrow F$, on dit que f est $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable en tout point de U et si $df : x_0 \in U \mapsto df_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, F)$ est continue.

On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble de telles fonctions.

Proposition 16. $\mathcal{C}^1(U, F)$ est stable par combinaison linéaire, produit, et composition lorsqu'elle a un sens. Il est aussi stable par extension (au sens de la proposition 13).

Exemple 17. (DEV 1) $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$ et $d(\det)_A(H) = \text{Tr}(\text{Com}(A)^t H)$.

Théorème 18. Soit $f : U \rightarrow F$ telle que les dérivées partielles de f existent et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur U alors $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Exemple 19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

2.2 Différentiation d'ordre k

Définition 20. Soit $f : U \rightarrow F$ et $k \geq 1$, f est $\mathcal{C}^k$ sur U si f est différentiable et si $df \in \mathcal{C}^{k-1}(U, F)$. On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble de telles fonctions et $\mathcal{C}^\infty(U, F) = \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{C}^i(U, F)$.

Proposition 21. Soit $1 \leq k \leq \infty$, $\mathcal{C}^k(U, F)$ est stable par combinaison linéaire, produit, extension et composition lorsqu'elle a un sens.

Définition 22. Soit $k \geq 1$ un entier et $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$, pour $i_1, \dots, i_k$ on not $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \right)$. Ce sont les dérivées partiels d'ordre k .

Proposition 23. Soit $f : U \rightarrow F$ et $k \geq 1$ un entier, alors $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ si et seulement si ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.

Théorème 24 (Scharwz). Soit $k \geq 2$ un entier et $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$, alors la valeur des dérivées partielles d'ordre k ne dépend pas de l'ordre de dérivation.

Exemple 25 (Laplacien en coordonnées polaires). Pour toute application $h \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ on pose $\Delta h(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$.

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ alors on a :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$$

3 Extremas

3.1 Gradient et Hessienne

Définition 26 (Gradient). Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable et $x_0 \in U$. On appelle gradient de f en x_0 et on note ∇f_{x_0} ou $\text{grad}(f)_{x_0}$ l'unique vecteur tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, df_{x_0}(X) = \langle \nabla f_{x_0}, X \rangle$ i.e.

$$\nabla f_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple 27. Si $f(x, y, z) = x^3 + x^2y - xz^2 + y^3$ alors $\nabla f_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy - z^2 \\ x^2 + 3y^2 \\ -2zx \end{pmatrix}$

Définition 28. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, F)$ et $x_0 \in U$, on définit la matrice Hessienne de f en x_0 par :

$$\text{Hess}(f)_{x_0} = (\partial_{i,j} f(x_0)) \in M_n(\mathbb{R})$$

Proposition 29 (DL2). Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, F)$ et $x_0 \in U$, on a $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x_0) + \langle \nabla f_{x_0}, h \rangle + \frac{1}{2} \text{Hess}(f)_{x_0}(h, h) + o(\|h\|^2)$.

3.2 Recherche d'extremas

Proposition 30. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue et K un compact de U . Alors f est bornée et atteint ses bornées sur K .

Exemple 31. $f(x, y) = x^2 - x + 2y^2$ est bornée et atteint ses bornes sur $D(0, 1)$

Définition 32 (Point critique). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$. Supposons f différentiable en x_0 , on dit que x_0 est un point critique de f si $df_{x_0} = 0$.

Proposition 33 (Condition d'ordre 1). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$. Supposons f différentiable en x_0 . Si x_0 est un point d'extremum local alors $df_{x_0} = 0$.

Exemple 34. La réciproque est fausse, un contre-exemple sont les points-cols (ou points-selles).

Remarque 35. Pour la recherche d'extremas, on peut s'intéresser aux points critiques intérieurs ; puis, si la domaine est compacte, étudier le bord ensuite.

Proposition 36 (Condition nécessaire d'ordre 2). Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $x_0 \in U$.

Si f admet un minimum (resp maximum) local en x_0 alors $df_{x_0} = 0$ et $Hess(f)_{x_0}$ est une forme bilinéaire symétrique positive (resp négative).

Proposition 37 (Condition suffisant d'ordre 2). Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $x_0 \in U$ un point critique de f . Si $Hess(f)_{x_0}$ est définie positive (resp définie négative) alors f admet un minimum (resp maximum) local strict en x_0 .

Exemple 38. Soit $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

f admet deux points critiques : $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.

$Hess_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = H_1$ et $\det H_1 = -36$ donc ce n'est pas un extremum local.

$Hess_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = H_2$ et $\det H_2 = -36 > 0$ et $Tr(H_2) = -18 < 0$ donc c'est un maximum local.

4 Théorème d'inversion locale

Définition 39. Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $V \subset F$ un ouvert non vide.

$f : U \rightarrow V$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^k$.

Proposition 40 (DEV 2). Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ tel qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ soit un isomorphisme. Alors il existe $V \subset U$ un ouvert tel que $x_0 \in V$, et $W \subset F$ tel que $f(x_0) \in W$ vérifiant

$$i \quad f(V) = W$$

$$ii \quad f : V \rightarrow W \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme.}$$

Exemple 41. Soit $f : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Pour tout point $P \in \mathbb{R}^2 - (0, 1)\mathbb{R}$ il existe un voisinage V_P de P tel que f induit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de V_P sur son image.

$U := \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$ est un ouvert maximal pour la propriété ci-dessus.

Exemple 42. On suppose U borné et $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur U et qu'elle vérifie :

$$i \quad \forall x \in U, df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$$

$$ii \quad f \text{ ne s'annule pas sur } \partial U.$$

Alors f s'annule un nombre fini de fois.