

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

NB : version non corrigée après retours du prof.

On se restreint à des ensembles finis dans toute la leçon.

1 Principes de dénombrements

1.1 Généralités [GK,GOU]

Soient A, B deux ensembles.

Proposition 1. 1. $|A| = |B|$ si et seulement s'il existe une bijection $\varphi : A \rightarrow B$.

2. $|A| \leq |B|$ si et seulement s'il existe une injection $\varphi : A \rightarrow B$.

3. $|A| \geq |B|$ si et seulement s'il existe une surjection $\varphi : A \rightarrow B$.

Proposition 2. On a $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Définition-Proposition 3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, une p -liste (ou p -uplet) de A est un élément de A^p . Le nombre de telles listes est $|A|^p$.

Exemple 4. Dans un jeu de 52 cartes, il y a 52^{10} façons de tirer 10 cartes avec remise.

Proposition 5. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de A , alors $|A| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Proposition 6. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ surjective, alors $(\varphi^{-1}(b))_{b \in B}$ est une partition de A .

Proposition 7 (Lemme des bergers). Soit $\varphi : A \rightarrow B$ surjective. S'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall y \in B, |\varphi^{-1}(y)| = a$ alors $|B| = \frac{|A|}{a}$.

Proposition 8. L'ensemble des applications de A vers B , noté B^A est de cardinal $|B|^{|A|}$.

Proposition 9. Supposons A, B finis, on note $|A| = n$ et $|B| = p$. On suppose $|A| \leq |B|$. Alors l'ensemble des applications de A vers B injectives est de cardinal $p(p-1) \dots (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$.

Exemple 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X de cardinal n et S_X l'ensemble des permutations de X dans lui-même. Alors $|S_X| = n!$

Définition-Proposition 11. S On appelle un p -arrangement de A toute p -liste de A composée d'éléments distincts.

Le nombre de p -arrangements de A est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 12. Dans un jeu de 52 cartes, il y a $\frac{52!}{42!}$ façons de tirer 10 cartes avec remise.

Proposition 13 (Formule du Crible de Poincaré (DEV 1a)). Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles, alors on a

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

1.2 Coefficient binomial [GOU]

Proposition 14. Supposons $|A| = n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{B}_p(A) := \{P \in \mathcal{P}(A), |P| = p\}$.

On définit pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le nombre $\binom{n}{k} = |\mathcal{B}_k(A)|$.

Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Définition 15. Si $|A| = n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle k -combinaison toute partie de A de cardinal k .

Proposition 16. On a $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Proposition 17. Soient $n, p \in \mathbb{N}$, on a

1. si $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie)
2. si $p, n \geq 1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (triangle de Pascal)
3. si $p, n \geq 1$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ (formule du capitaine)

Proposition 18. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Proposition 19 (Binôme de Newton). Soient a, b éléments d'une algèbre tels que $ab = ba$. Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$.

Proposition 20 (Formule de Vandermonde). Soient m, n, p des entiers naturels, on a

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

En particulier, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exemple 21. On peut calculer le nombre de parties de $\{1, \dots, 2n\}$ qui contiennent autant de nombres pairs que de nombres impaires, ou encore le nombre de parties de $\{1, \dots, 3n\}$ qui contiennent autant de multiples de 3 que de nombres premiers à 3.

2 Cardinaux dans des groupes

2.1 Groupe des permutations [GOU]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $A_n \subset S_n$ le groupe alterné - ou groupes des permutations paires.

Proposition 22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n| = n!$, et si $n \geq 2$ alors $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Définition 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute permutation $\sigma \in S_n$ n'ayant aucun point fixe.

On note δ_n le nombres de tels dérangements (avec $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = 0$).

Proposition 24 (DEV 1 b). $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

Proposition 25 (DEV 1 c et fin). $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor$.

2.2 Actions de groupes [ROM]

Soit G un groupe et X un ensemble, on considère une action de groupe $(g, x) \in G \times X \mapsto g \cdot x \in X$.

Définition 26. Soit $x \in X$, on note $G \cdot x = \{g \cdot x, g \in G\}$ l'orbite de x et $G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x .

Soit $g \in G$ on note $\text{Fix}(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}$.

Proposition 27 (Formule Orbite/Stabilisateur). Soit $x \in X$. Si G est de cardinal fini, alors $|G| = |G \cdot x| \times |G_x|$.

Proposition 28 (Equation aux classes). On suppose que X est fini. Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ tels que $G \cdot x_1, \dots, G \cdot x_r$ soient l'ensembles des orbites de l'action deux à deux distinctes.

On a alors : $|X| = \sum_{i=1}^r |G \cdot x_i| = |G| \times \sum_{i=1}^r \frac{1}{|G_{x_i}|}$

Proposition 29 (IP). Soient $g \in G, x \in X$, les groupes G_{gx} et G_x sont isomorphes, en particulier $|G_{gx}| = |G_x|$.

Proposition 30 (Formule de Burnside[IP] (DEV 2a)). Soit r le nombre d'orbites, on a $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$.

2.3 Groupe d'isométries [ROM]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, de norme $\|\cdot\|$.

Définition 31. On note $O(E)$ l'ensemble des applications linéaires $u : E \rightarrow E$ vérifiant : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

On note $SO(E) = \{u \in O(E), \det(u) = 1\}$.

Remarque 32. En dimension impaire, on a $O(E) = SO(E) \times \{\pm 1\}$.

Définition 33. Soit $P \subset E$ une partie non vide, on note $\text{Iso}(P) = \{u \in O(E), u(P) = P\}$ et $\text{Iso}^+(P) = \{u \in SO(E), u(P) = P\}$.

Proposition 34. (DEV 2 b) Soit C le cube régulier, on a $\text{Iso}(C) \simeq \{\pm 1\} \times \text{Iso}^+(C)$ et $\text{Iso}^+(C) \simeq S_4$.

Proposition 35. (DEV 2 c et fin) [IP] Soit $c \in \mathbb{N}^*$, le nombre de colorations distinctes du cubes avec c couleurs est $\frac{c^2}{24}(c^4 + 3c^2 + 12c + 8)$.

3 Références

- Algèbre Probabilité, Gourdon [GOU]
- Algèbre et géométrie, 2e édition, Rombaldi [ROM]
- L'oral à l'agrégation de mathématiques, une sélection de développements, 2e édition, Isenmann Pécatte [IP]
- De l'intégration aux probabilités, Garet Kurtzmann [GK]