

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

1 Suites récurrentes

VERSION NON CORRIGEE, retour de prof : il manque les cas matriciels $X_{n+1} = AX_n$ et des dessins en dimension 2.

1.1 Généralités [GOU]

Définition 1. Soient (E, d) un espace métrique et $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite *récurrente d'ordre h* s'il existe une application $f : E^h \rightarrow E$ telle que $\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$.

Exemple 2 (Suite de Fibonacci). La suite (F_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est une suite récurrente d'ordre 2

Exemple 3. La suite (u_n) définie par $u_0 = c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$ est une suite d'ordre 1

Proposition 4. Soient (E, d) un espace métrique, (u_n) une suite récurrente d'ordre h , et $f : E^h \rightarrow E$ vérifiant :

$$\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$$

Si $u_n \mapsto l \in E$ et si f est continue en $(l, \dots, l)$ alors $l = f(l, \dots, l)$.

Remarque 5. Pour une suite récurrente d'ordre 1, on s'intéressera donc de près aux points fixes de l'application f

Proposition 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone, et son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
2. Si f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et leurs sens de variation sont opposés.

Exemple 7. La suite définie en exemple 3 est monotone.

1.2 Cas particuliers[GOU]

Définition 8. Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel E . On dit que (u_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe $a \in E$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$. Alors a est appelé la raison de la suite arithmétique.

Proposition 9. Soit (u_n) une suite arithmétique, à valeurs dans un espace vectoriel E , de raison a . Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = an + u_0$.

Définition 10. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$. Alors q est appelé la raison de la suite géométrique.

Proposition 11. Soit (u_n) une suite géométrique, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de raison q . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.
En particulier, si $u_0 \neq 0$:

1. Si $q = 1$, la suite est constante
2. Si $|q| < 1$ la suite converge vers 0
3. Si $|q| > 1$ la suite diverge.

Exemple 12 (Cas $|q| = 1$). La suite $(u_0 \times 1^n)$ converge pour tout u_0 , mais la suite $((-1)^n)$ diverge.

Définition 13. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe $a, q \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q + a$.

Proposition 14. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + a$ avec $a, q \in \mathbb{C}$.
Si $q \neq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n(u_0 - r) + r$ avec $r = \frac{a}{1-q}$.

Définition 15. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que (u_n) vérifie une récurrence homographe si elle vérifie une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n) \text{ avec } h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \text{ et } ad-bc \neq 0 \quad (*)$$

Une telle suite est définie pour tout n si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule $x \mapsto cx + d$.

Proposition 16. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant $(*)$. On considère l'équation

$$h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0 \quad (E)$$

1. Si (E) admet deux racines distinctes α, β on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \text{ où } k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$$

2. Si (E) admet une racine double α alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \text{ où } k = \frac{c}{a - \alpha c}$$

Définition 17. On dit qu'une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à coefficients constants si

$$\forall n \geq h, u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_h u_{n-h} \text{ avec } a_1, \dots, a_h \in \mathbb{C} \quad (*)$$

Proposition 18. L'équation $x^h - a_1 x^{h-1} - \dots - a_h = 0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence $(*)$. Si on note $r_1, \dots, r_q$ ses racines distinctes de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $(*)$ est l'ensemble des suites de la forme

$$u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_q(n)r_q^n$$

où pour tout i $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i-1}[X]$.

Exemple 19. La suite de Fibonacci définie en exemple 2 vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\frac{1}{\varphi})^n)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.3 Comportement lent à l'infini (DEV 1) [BER]

Proposition 20. Soit $b < 0$ et $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

1. f est continue
2. f est croissante
3. $\forall x \in]0, b], f(x) < x$ et $f(0) = 0$
4. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r > 1$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$$

Alors pour tout $c \in]0, b[$ on peut définir la suite

$$\begin{cases} u_0 = c \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

à valeurs dans $]0, b[$, qui converge vers 0.

De plus, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}}$ où $K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$

Corollaire 21. On a en particulier pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$ le développement asymptotique suivant :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{n} + \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Corollaire 22. Soit $d > 0$, la relation

$$\begin{cases} v_0 = d \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \exp(-v_n^2) \end{cases}$$

définit une suite (v_n) vérifiant $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}$

2 Point fixe et attraction[ROU]

Théorème 23. Soit (E, d) un espace métrique complet et $F : E \rightarrow E$ une application.

Si F est contractante, alors il existe une unique point fixe de F dans E .

De plus, ce point est limite des suites (x_n) définies par $x_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$.

En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.

Exemple 24. Soit $a \in]0, \frac{1}{2}$, l'application $F : [0, a] \rightarrow [0, a], x \mapsto x^2$ est contractante et admet un unique point fixe (dessin). C'est faux pour $a = 1$. (dessin)

Proposition 25 (Attraction, répulsion, superattraction). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$ un point fixe de F .

1. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$, alors la suite est constante, de valeur a .
2. Supposons $|F'(a)| < 1$. Soient J un intervalle fermé de centre a , stable par F et (x_n) la suite définie par $x_0 \in J, x_0 \neq a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$. Alors $x_n \rightarrow a$, de plus :
 - (a) si F' ne s'annule pas sur J on a $x_{n+1} - a \sim F'(a)(x_n - a)$ (convergence d'ordre 1)
 - (b) si F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et si $F'(a) = 0$ et F'' ne s'annule pas sur J , alors $x_{n+1} - a \sim \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2$
3. Si $|F'(a)| > 1$ alors il existe J un intervalle fermé de centre a tel que pour $x_0 \in J, x_0 \neq a$, la suite (x_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$ sorte de J

Exemple 26 (Comportements variés).

Soit $F : x \mapsto 1 - x$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_{2n} = x_0$ et $x_{2n+1} = 1 - x_0$.

Si $F = Id$ les suites itérées sont des suites constantes, donc qui convergent.

Proposition 27 (Théorème de césaro).

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{C}$ alors $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow l$.

Corollaire 28 (lemme de l'Escalier).

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, si $u_{n+1} - u_n \rightarrow l \in \mathbb{C}$ alors $\frac{u_n}{n} \rightarrow l$

Exemple 29 (Méthode de la dérivée discrète).

Soit (x_n) définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Alors $x_n \rightarrow 0$.

De plus, en considérant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ on obtient $y_n \rightarrow 1$ et $x_n \sim \frac{1}{n}$.

3 Résolution approchée d'équation

Définition-Proposition 30 (Algorithme de Dichotomie). Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone, vérifiant $f(a)f(b) < 0$.

Alors d'après le théorème de la bijection il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

On définit la suite (x_n, y_n) récurrente d'ordre 2 par $(x_0, y_0) = (a, b)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x_n + y_n}{2}, y_n \right) & \text{si } f(x_n)f\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) > 0 \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(x_n, \frac{x_n + y_n}{2} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors (x_n) et (y_n) convergent vers a et fournissent un encadrement dont la précision vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Définition-Proposition 31 (Méthode de Newton(DEV 2)[ROU]).

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On cherche à résoudre $f(x) = 0$.

On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c, d], f'(x) > 0$, en particulier f admet un unique zéro noté a .

On pose $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et on définit la suite récurrente (x_n) par $x_0 \in [c, d]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x_0 \in]a - \alpha, a + \alpha[$, $x_n \rightarrow a$ et la convergence est d'ordre deux (super attraction).

Enfin, si f est convexe, la convergence est d'ordre deux pour tout x_0 .

Remarque 32. Il est aussi possible de montrer la convergence si la dérivée s'annule au zéro de f , sous d'autres hypothèses.

Exemple 33 (Méthode de Héron). En considérant $f : x \mapsto x^2 - a$ on est amené à poser $x_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ pour approcher la valeur de $\sqrt{a}$.

4 Références

Analyse, 3e édition, Xavier Gourdon [GOU]

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière [ROU]

Analyse pour l'agrégation de Mathématiques 40 développements, Julien Bernis, Laurent Bernis [BER]

Remarque : le 2e développement sur la méthode de Newton est aussi présenté dans le Isenmann-Pécatte avec une approche un peu différente, notamment sur le jeu d'hypothèses.