Leçon 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A est un événement de probabilité non nulle.

1 Notions d'indépendance

1.1 Événements indépendants

Définition 1. Pour tout événement B, on définit la probabilité de B sachant A comme le réel noté $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Théorème 2. *L'application $P_A : B \mapsto P(B|A)$ est une probabilité.*

Définition 3. Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition 4. *Soient A et B deux événements :*

- *Si $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement $P(B|A) = P(B)$.*
- *Les événements Ω et $\varnothing$ sont indépendants de tout autre événement.*
- *A est indépendant de lui même si et seulement si il est de probabilité 0 ou 1.*
- *Si A et B sont indépendants alors A et B^c le sont, ainsi que A^c et B et que A^c et B^c.*
- *Si A est négligeable ou presque certain alors A est indépendant de B.*

Définition 5. Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits (mutuellement) indépendants lorsque pour tout $p \leqslant n$ et tout p-uplet $(i_1, \dots, i_p)$ deux à deux distincts on a $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_p})$.

Exemple 6. Considérons un lancer de 2 dés et les événements A "la somme des dés est paire", B "le premier dé est pair" et C "le deuxième dé est pair". Les événements sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Théorème 7. *Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ suite d'événements indépendants, alors* $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1.2 Indépendances de tribus et de variables aléatoires

Définition 8. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des sous tribus de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes lorsque pour tout couple d'événements $(A, B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ les événements sont indépendants.
Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$, on dit que cette famille est indépendante lorsque pour tout sous ensemble $J \subset I$ on a pour tout $(A_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} A_i, P(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} P(a_i)$.

Définition 9. Soit X une variable aléatoire sur Ω, on note $\sigma(X) = \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, c'est une tribu appelée tribu engendrée par X.

Définition 10. On dit que de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes lorsque les tribus $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ qu'elles engendrent sont indépendantes.

Exemple 11. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes alors pour tout couple de borélien A et B on a $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Définition 12. Soient $\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, P_2)$ deux espaces probabilisés. On définit la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ qui est engendrée par l'ensemble des $B_1 \times B_2$ avec $B_i \in \mathcal{T}_i$. Sur cette tribu on définit la probabilité produit $P_1 \otimes P_2$ par $P_1 \otimes P_2(B_1 \times B_2) = P_1(B_1)P_2(B_2)$.

Théorème 13. *Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires, elles sont indépendantes si et seulement si la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est égale au produit des lois des X_i.*

Proposition 14. *Deux variables aléatoires discrètes S et T sont et seulement si $P(S = x) \cap (T = y) = P(S = x)P(T = y)$.*

Proposition 15. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles à densité. Elles sont indépendantes si et seulement si la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ est égale au produit des densités des X_i.*

Proposition 16. *Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes aléatoires et si $g_1, \dots, g_n$ sont des fonctions mesurables, alors les variables $Y_1 = g_1(X_1), \dots, Y_n = g_n(X_n)$ sont indépendantes.*

2 Propriétés autour de l'indépendance

2.1 Critères d'indépendance

Définition 17. On appelle covariance des variables aléatoires X et Y, lorsqu'elle existe, la quantité $cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - (\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Théorème 18. *Si X et Y variables aléatoires indépendantes intégrables alors XY est intégrable et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Plus généralement si X et Y sont indépendantes et f, g mesurables telles que $f(X)$ et $f(Y)$ sont intégrables, alors $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.*

Proposition 19. *Si X et Y variables aléatoires indépendantes admettant covariance, alors cette covariance est nulle.*

Remarque 20. La réciproque est fausse par exemple avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϵ indépendante de X_1 telle que $P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = 1/2$. En posant $X_2 = \epsilon X_1$, on voit que $cov(X_1, X_2) = 0$ mais elles ne sont pas indépendantes sinon $|X_1|$ et $|X_2| = |X_1|$ seraient indépendantes.

Corollaire 21. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables avec un moment d'ordre 2 qui sont 2 à 2 indépendantes alors $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$.*

Exemple 22. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $Var(X) = np(1-p)$.

Définition 23. Le coefficient de corrélation des variables aléatoires X et Y est défini (lorsqu'il existe) par $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Si $\rho(X,Y) = 0$ on dit que les variables sont non corrélées.

Proposition 24. *Si X et Y sont indépendantes alors elles sont non corrélées.*

Définition 25. Lorsque X variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[\exp(itX)]$. Lorsque X admet une densité f alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) f(x) dx$.

Proposition 26. *Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \varphi_Y$.*

2.2 Somme de variables aléatoires

Proposition 27. *Soient X et Y variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\mathbb{R}^d$. Alors la loi de $X+Y$ est $P_X * P_Y$ en particulier :*

- *Si X et Y sont à valeur dans $\mathbb{N}$ on a $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = y)P(Y = n-k)$.*
- *Si X et Y admettent une densité f_X et f_Y alors $X+Y$ admet pour densité $f_X * f_Y$.*

Exemple 28. Si $X, Y \sim U[0,1]$ indépendantes alors $X+Y$ admet pour densité la fonction "tente" $f(t) = t$ sur $[0,1]$ et $f(t) = 2-t$ sur $[1,2]$.

Exemple 29. Soit $X_1, \dots, X_n$ variables indépendantes suivant loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Définition 30. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leqslant 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X=k) s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Théorème 31. *Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.*

Exemple 32. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Théorème 33. *(Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} Re(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leqslant 2\frac{A(r)-u(0)}{r^n}$ et si $A(r) \underset{r \to \infty}{=} O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.*

Lemme 34. *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(az)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Théorème 35. *Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.*

3 Théorèmes limites

3.1 Lemmes de Borel-Cantelli

Théorème 36. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événement :*

- *Si la somme $\sum P(A_n)$ est finie alors $P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$, c'est-à-dire presque sûrement, seul un nombre fini d'évènements A_n se réalisent.*
- *Si la somme $\sum P(A_n) = +\infty$ et les A_n sont indépendants alors $P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$, c'est-à-dire que presque sûrement un nombre infini d'événements se réalisent.*

Exemple 37. Si un singe immortel presse aléatoirement les touches d'un clavier d'une machine à écrire chaque seconde, alors il tapera presque sûrement cette leçon une infinité de fois.

3.2 Loi des grands nombres

Théorème 38. *(Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables indépendantes identiquement distribuées (iid) intégrables. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$.*

Théorème 39. *(Loi Forte des Grands Nombres) oit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid de même loi que X. Alors la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers m si et seulement si X intégrable et $m = \mathbb{E}[X]$.*

3.3 Théorème central limite

Définition 40. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 41. *Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.*

Théorème 42. *(Lévy) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires réelles et X variable aléatoire réelle. On a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 43. *(TCL) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid et L^2. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$ alors on a que la suite $\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.*

Application 44. (Stirling) On a $n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

DEV 1 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 33 et 35
DEV 2 : Stirling par TCL 43 et 44
DEV 3 : Levy et TCL 41,42 et 43

Références

[APP24] Walter APPEL : Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités Ed. 1. De Boeck supérieur, 2024.

[CHA16] MarieLine CHABANOL : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques. Ellipses, 2016.

[HQ17] Martine QUEFFELEC Hervé QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.

[MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :
Il s'agit d'une leçon de synthèse autour de l'indépendance, concept

incontournable qui démarque la théorie des probabilités de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements et d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues. Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois, en lien avec les fonctions génératrices et caractéristiques. Des thèmes pouvant également être abordés sont le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur Z.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi forte des grands nombres, l'indépendance d'une suite de tribus, la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens ou le théorème de Cochran.