Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A est un événement de probabilité non nulle.

1 Généralités

1.1 Caractérisation

Définition 1. Une variable aléatoire discrète est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable.

Définition 2. La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application $P_X : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto P(X \in A) \in \mathbb{R}^+$.

Définition 3. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est l'application $F : x \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leqslant x) \in [0,1]$.

Proposition 4. *Soit X vad de fonction de répartition F, alors :*

- *F est croissante sur $\mathbb{R}$,*
- *$\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} F(x) = 1$,*
- *F est continue à droite,*
- *Si $a \in X(\Omega)$ tel que $P(X = a) > 0$ alors F admet à gauche un saut de discontinuité égal à $P(X = a)$.*

1.2 Lois usuelles

Définition 5. Soient $a, b \in \mathbb{N}$, on dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ noté $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ lorsque pour tout $k \in [\![a,b]\!], P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$

Définition 6. Une variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ lorsque X est à valeur dans $\{0,1\}$ et $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

Proposition 7. *Toute fonction indicatrice d'un événement est une variable de Bernoulli, en particulier le produit de 2 variables de Bernoulli est encore une variable de Bernoulli.*

Définition 8. En réalisant successivement n épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, on obtient une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p noté $X \sim \mathbb{B}(n,p)$. Ainsi X est à valeur dans $[\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition 9. En considérant une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, en notant X la va du premier succès alors X suit la loi $P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p noté $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Définition 10. Pour modéliser n tirages aléatoires sans remise dans une urne avec N boules sera modélisé par une loi hypergéométrique noté $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$. X sera presque sûrement à valeur dans $[\![\max(0, n-(1-p)N; \min(n,pN)]\!]$ et $P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Remarque 11. Lorsque N est grand devant n, la loi de X est bien approchée par une loi binomiale. La loi $\mathcal{H}(N,n,p)$ converge en loi quand $N \to \infty$ vers une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Définition 12. Pour décrire la probabilité d'événement rares sur un temps long, on utilise la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ qui est presque sûrement à valeur dans $\mathbb{N}$ et $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Théorème 13. *Soit $(p_n)_n$ suite réels dans $]0,1[$ tels que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Pour chaque n on répète n fois une épreuve de Bernoulli de probabilité p_n et on note X_n la va égale au nombre de succès obtenus, ainsi $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. On dira plus tard que $(X_n)_n$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.*

2 Moments et fonctions génératrices

2.1 Moments

Définition 14. L'espérance d'une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in K\}$ et $p_k := P(X = x_k)$ est la quantité $\mathbb{E}[X] :=$

$\sum_{k\in K} x_k p_k$. On dit que X est intégrable ou admet une espérance lorsque la famille $(p_k x_k)_k$ est sommable.
Dans le cas où $K = \mathbb{N}$, X admet une espérance lorsque la série $\sum p_k|x_k|$ converge.

Théorème 15. *Soit X va à valeur dans $\mathbb{N}$. Alors X est intégrable si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant n)$ converge. De plus dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on a l'égalité $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.*

Proposition 16. *Soient X et Y des variables aléatoires discrètes :*

- *Si X est presque sûrement constante égale à a alors X admet une espérance et $\mathbb{E}[X] = a$, en particulier $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]$.*
- *Si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}[X] = 0$ alors X est nulle presque sûrement.*
- *Si $X \geqslant 0$ presque sûrement et si $\mathbb{E}[X] = 0$ alors $X = 0$ presque sûrement.*
- *Si $X \leqslant Y$ admettent une espérance alors $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$.*
- *X admet une espérance si et seulement $|X|$ en admet une et on a $|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$.*
- *Soient $x\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et X, Y admettent une espérance alors $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[Y]$.*

Définition 17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le moment d'ordre n d'une va discrète X prenant les valeurs $\{x_k; k \in K\}$, comme l'espérance, lorsqu'elle existe de X^n : $m_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \sum_{k\in K} x_k^n p_k$.

Théorème 18. *Soit X va discrète admettant un moment d'ordre $n \geqslant 2$, alors X admet des moments d'ordre $1, 2, \ldots, n$.*

Définition 19. On dit qu'une variable aléatoire discrète X discrète admet une variance ou est de carré intégrable lorsqu'elle admet un moment d'ordre 2, sa variance est alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \geqslant 0$.
Si X admet une variance alors son écart-type est $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition 20. *Soit X va discrète admettant une variance et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.*

Remarque 21. En annexe il y a un tableau des espérance et variances des lois classiques énoncées précédemment.

2.2 Fonctions génératrices

Définition 22. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leqslant 1, G_X(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = k)s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Proposition 23. *Soit X va discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G.*

1. *G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ au moins.*
2. *$G(1) = 1$ et $G(t) \in [0, 1]$ pour $t \in [0, 1]$.*
3. *G est absolument monotone sur $[0, 1]$: toutes ses dérivées successives sont positives.*

Théorème 24. *On peut récupérer les probabilités p_n à partir des dérivées successives de G en 0 : $p_n = P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$.*
Ainsi la fonction génératrice caractérise la loi de X, deux variables aléatoires de même fonction génératrice ont la même loi.

Théorème 25. *Une va discrète X est intégrable si et seulement si G est dérivable à gauche en 1 et alors $\mathbb{E}[X] = G'(1)$. Plus généralement X est intégrable k fois si et seulement si G est k fois dérivable à gauche en 1. Notamment pour $k = 2$ X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.*

Remarque 26. En annexe, un tableau avec les fonction génératrices des lois classiques et leur domaine de définition.

Exemple 27. Galton Watson

Théorème 28. *Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1+\cdots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \ldots G_{X_n}(s)$.*

Exemple 29. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Théorème 30. *(Hadamard) Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} Re(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leqslant 2\frac{A(r)-u(0)}{r^n}$ et si $A(r) \underset{r\to\infty}{=} O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.*

Lemme 31. *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(az)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Théorème 32. *Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.*

3 Convergence et théorèmes limites

3.1 Borel-Cantelli et loi des grands nombres

Théorème 33. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événement :*

- *Si la somme $\sum P(A_n)$ est finie alors $P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$, c'est-à-dire presque sûrement, seul un nombre fini d'évènements A_n se réalisent.*
- *Si la somme $\sum P(A_n) = +\infty$ et les A_n sont indépendants alors $P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$, c'est-à-dire que presque sûrement un nombre infini d'événements se réalisent.*

Exemple 34. Si un singe immortel presse aléatoirement les touches d'un clavier d'une machine à écrire chaque seconde, alors il tapera presque sûrement cette leçon une infinité de fois.

Exemple 35. Marche aléatoire non bornée

Théorème 36. *(Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables indépendantes identiquement distribuées (iid) intégrables. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$.*

Théorème 37. *(Loi Forte des Grands Nombres) oit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid de même loi que X. Alors la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers m si et seulement si X intégrable et $m = \mathbb{E}[X]$.*

3.2 Convergence en loi et TCL

Définition 38. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Définition 39. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Remarque 40. Il n'y a pas unicité de la limite, si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ alors on peut seulement dire que X et Y ont la même loi mais ne sont pas forcément égales.

Théorème 41. *Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.*

Théorème 42. *(Lévy) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires réelles et X variable aléatoire réelle. On a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 43. *(TCL) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid et L^2. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$ alors on a que la suite $\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.*

Application 44. (Stirling) On a $n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

4 Annexe

Nom	Désignation	$\mathbf{P}\{X=k\}$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$
Loi uniforme	$\mathscr{U}([1;n])$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Loi uniforme	$\mathscr{U}([a;b])$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$\begin{cases} p & \text{si } k=1, \\ 1-p & \text{si } k=0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathscr{B}(n;p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Loi binomiale négative	$\mathrm{BN}(m;p)$	$\binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$	$\frac{m}{p}$	$\frac{m(1-p)}{p^2}$
Loi géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Loi hypergéométrique	$\mathscr{H}(N;n;p)$	$\frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

Loi	Désignation	$G(t)$	Domaine
Loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$1-p+pt$	$\mathbb{R}$
Loi binomiale	$\mathscr{B}(n;p)$	$(1-p+pt)^n$	$\mathbb{R}$
Loi géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	$\left]-\frac{1}{1-p};\frac{1}{1-p}\right[$
Loi de Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$	$\mathbb{R}$

TABLE 11.1 — *Fonctions génératrices des lois discrètes classiques.*

DEV 1 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 30 et 32
DEV 2 : Stirling par TCL 43 et 44
DEV 3 : Levy et TCL 41, 42 et 43

Références

[APP24] Walter APPEL : Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités Ed. 1. De Boeck supérieur, 2024.

[HQ17] Martine QUEFFELEC Hervé QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.

[MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :
Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur Z ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.