

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A est un événement de probabilité non nulle et $(X_n)_n$ et X des v.a. définies sur Ω

1 Modes de convergence

1.1 Convergence presque sûre

Définition 1. On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X lorsque $P(\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$. On écrit alors $X_n \xrightarrow{ps} X$ ou $X_n \rightarrow X$ ps.

Proposition 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $X_n \xrightarrow{ps} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{ps} f(X)$.

Théorème 3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $X_n \xrightarrow{ps} X$;
- Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon; I.S) = 0$;
- Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\exists n \geq N \mid |X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$;
- Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Corollaire 4. 1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors $X_n \xrightarrow{ps} X$.

2. Si la série $\sum \mathbb{E}[|X_n - X|]$ converge, alors $X_n \xrightarrow{ps} X$.

1.2 Convergence en probabilité

Théorème 5. (Bienaymé-Tchebychev) Soit $X \in L^2$ variable aléatoire réelle discrète admettant une variance. On note $m = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Définition 6. On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X , noté $X_n \xrightarrow{P} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Théorème 7. Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X \stackrel{ps}{=} Y$.

Proposition 8. Soient X_n, Y_n, X, Y des v.a. sur Ω , alors :

1. $X_n \xrightarrow{P} X \iff (X_n - X) \xrightarrow{P} 0$;
2. Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$.

Théorème 9. Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive, continue, bornée, croissante, telle que $\psi(0) = 0$ et strictement croissante au voisinage de 0. Alors $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\psi(|X_n - X|)] = 0$.

On peut prendre $\psi(x) = \min(1, x)$ ou $\psi(x) = \frac{x}{1+x}$ ou $\psi(x) = \arctan(x)$.

Théorème 10. On a les propriétés suivantes :

1. Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.
2. Si $X_n \xrightarrow{ps} X$ alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Remarque 11. La réciproque est fausse, mais on verra une condition pour obtenir une réciproque partielle.

1.3 Convergence dans L^p

Définition 12. On dit que $(X_n)_n$ converge dans L^1 vers X lorsque les variables aléatoires $X - X_n$ sont intégrables et que $\mathbb{E}[|X - X_n|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On écrit alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Cette définition valable pour les variables réelles se transpose aux variables dans $\mathbb{R}^n$ en remplaçant $|X - X_n|$ par $\|X - X_n\|$.

Théorème 13. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} X$ alors $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[X]$.

Définition 14. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p lorsque $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$.

Remarque 15. L^p est muni d'une norme en posant $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$.

Théorème 16. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} Y$ alors $X = Y$ presque sûrement.

Proposition 17. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} X$ alors $\mathbb{E}[X_n^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{V}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{V}(X)$.

Théorème 18. 1. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} X$ alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$.

2. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ et $1 \leq q \leq p$ alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^q} X$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} X$.

1.4 Convergence en loi

Définition 19. La fonction de répartition F d'une var X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.

Théorème 20. La fonction de répartition caractérise la loi.

Définition 21. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Remarque 22. Il n'y a pas unicité de la limite, si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$ alors on peut seulement dire que X et Y ont la même loi mais ne sont pas forcément égales.

Théorème 23. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Proposition 24. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} f(X)$.

Définition 25. Lorsque X variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto \mathbb{E}[\exp(itX)]$. Lorsque X admet une densité f alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)f(x)dx$.

Proposition 26. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \varphi_Y$.

Théorème 27. (Lévy) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires réelles et X variable aléatoire réelle. On a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Proposition 28. Soient $(X_n)_n, (Y_n)_n, X, Y$ des variables aléatoires sur Ω . On suppose pour tout $n \in \mathbb{N}$ que X_n et Y_n indépendants et X et Y indépendants. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$. Alors la suite $(X_n, Y_n)_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X, Y)$, en particulier $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X + Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} XY$.

Théorème 29. Soient $(f_n)_n$ les densités de $(X_n)_n$ et f densité de X . Si $(f_n)_n$ converge presque partout vers f alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$.

2 Relation entre les modes de convergence

Théorème 30. On a les implications $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$.

Remarque 31. Voir annexe pour un schéma des implications.

Théorème 32. (Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événement :

- Si la somme $\sum P(A_n)$ est finie alors $P(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$, c'est-à-dire presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.
- Si la somme $\sum P(A_n) = +\infty$ et les A_n sont indépendants alors $P(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$, c'est-à-dire que presque sûrement un nombre infini d'événements se réalisent.

Exemple 33. Si un singe immortel presse aléatoirement les touches d'un clavier d'une machine à écrire chaque seconde, alors il tapera presque sûrement cette leçon une infinité de fois.

Proposition 34. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ alors il existe une suite extraite $(X_{\varphi(n)})_n$ qui converge presque sûrement vers X .

Théorème 35. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ et $(X_n)_n$ est presque sûrement bornée (il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $P(|X_n| \leq M) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ pour tout $p \geq 1$.

Proposition 36. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ et si $(X_n)_n$ est bornée dans un L^q alors pour tout $1 \leq p < q$, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$.

Remarque 37. Voir annexe schéma des réciproques partielles.

3 Théorèmes limites

3.1 Lois des grands nombres

Théorème 38. (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables indépendantes identiquement distribuées (iid) intégrables.

Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$.

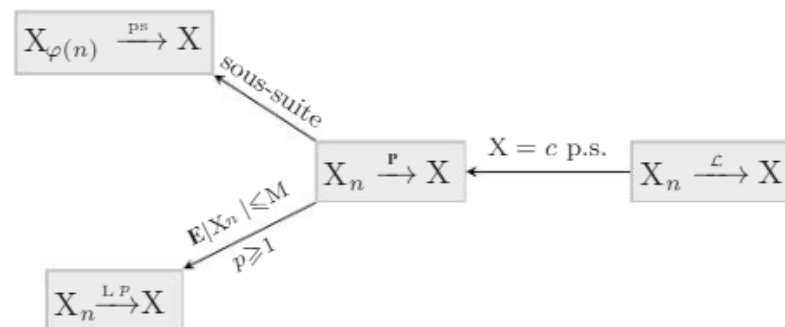
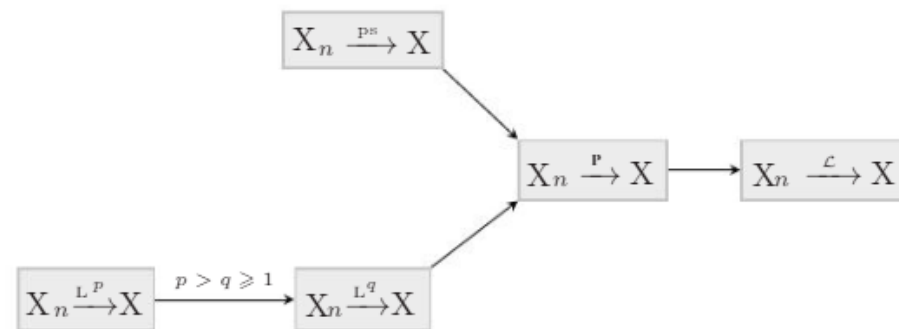
Théorème 39. (Loi Forte des Grands Nombres) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid de même loi que X . Alors la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{X_1 + \dots + X_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers m si et seulement si X intégrable et $m = \mathbb{E}[X]$.

3.2 Théorème central limite

Théorème 40. (TCL) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid et L^2 . On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ alors on a que la suite $\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Application 41. (Stirling) On a $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

4 Annexe



DEV 1 : Stirling par TCL 40 et 41
DEV 2 : Levy et TCL 23, 27 et 40

Références

- [APP24] Walter APPEL : Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités Ed. 1. De Boeck supérieur, 2024.
- [MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au coeur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.