

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire: caractérisations, exemples, applications.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A est un événement de probabilité non nulle et $(X_n)_n$ et X des v.a. définies sur Ω

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Généralités

Définition 1. Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$, l'événement $\{X \in B\}$ est un élément de la tribu $\mathcal{F}$.

Proposition 2. Soit X une application sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors X est une variable aléatoire si et seulement si $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Fonctionne aussi pour $x \in \mathbb{Q}$)

Définition 3. La loi d'une variable aléatoire X est l'application définie sur la tribu des boréliens $P_X : B \in \mathcal{B} \mapsto P(X \in B) \in [0, 1]$.

Proposition 4. Si X est une variable aléatoire, alors sa loi P_X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 5. L'espérance $\mathbb{E}[X]$ d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est son intégrale sur cet espace. Lorsque $\mathbb{E}[X] < \infty$, on dit que X est intégrable.

Définition 6. Si X est à valeur dans $\mathbb{R}$ on définit sa partie positive et sa partie négative comme $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$, de sorte que $X = X^+ - X^-$ et $|X| = X^+ + X^-$. Si X^+ et X^- sont intégrables alors X est intégrable et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$.

Théorème 7. L'espérance est une forme linéaire, c'est-à-dire pour toute variables aléatoires intégrables X, Y et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$.

Théorème 8. (Transfert) Soit X variable aléatoire et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Alors $\varphi(X)$ intégrable si et seulement si φ intégrable

pour la mesure P_X et dans ce cas : $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dP_X(x)$.

Définition 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et X variable aléatoire telle que X^p est intégrable, on dit que X admet un moment d'ordre p qui est $m_p(X) = \mathbb{E}[|X|^p]$.

Remarque 10. Une v.a. admettant un moment d'ordre 2 admet donc une variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Théorème 11. (Markov) Soit Y v.a. positive intégrable, alors pour tout $t > 0$ on a $P(Y \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t}$.

Théorème 12. (Bienaymé-Tchebychev) Soit X v.a. réelle admettant moment d'ordre 2, d'espérance m et de variance σ^2 . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

1.2 Loïs usuelles

En annexe un tableau des lois usuelles.

Remarque 13. Voici des exemples de modélisations pour les lois usuelles :

1. Loi uniforme : Choix au hasard d'un réel entre a et b .
2. Loi de Bernoulli : Expérience à 2 issues de probabilité de succès p (une pièce pipée).
3. Binomiale : Répétition n fois indépendante d'une Bernoulli (lancé de n pièces pipées).
4. Géométrique : Rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli.
5. Poisson : nombre d'occurrence dans une unité de temps d'un événement (neutrinos).

2 Fonctions de caractérisation

2.1 Fonction de répartition

Définition 14. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est l'application $F : x \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leq x) \in [0, 1]$.

Théorème 15. La fonction de répartition caractérise la loi. Si X et Y ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

Proposition 16. Soit X va de fonction de répartition F , alors :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,
3. F est continue à droite,
4. Si $a \in X(\Omega)$ tel que $P(X = a) > 0$ alors F admet à gauche un saut de discontinuité égal à $P(X = a)$. Plus précisément $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$.

Définition 17. On dit qu'une variable aléatoire X admet une densité, lorsqu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Proposition 18. Soit X va réelle admettant pour densité f , $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha X + \beta$ admet pour densité la fonction $g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

Proposition 19. Si pour toute fonction f mesurable bornée on a $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$ alors X admet pour densité g .

Remarque 20. Si la fonction de répartition est de classe $\mathcal{C}^1$ alors, il suffit de la dériver pour obtenir la fonction de densité.

Théorème 21. Soit X va réelle admet une densité f . X est intégrable si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est intégrable et dans ce cas $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$.

2.2 Fonction caractéristique

Définition 22. Lorsque X variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[\exp(itX)]$. Lorsque X admet une densité f alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)f(x)dx$.

Proposition 23. Soit X variable aléatoire réelle de fonction caractéristique φ_X .

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$.
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_{aX+b}(t) = \exp(itb)\varphi_X(at)$.

Théorème 24. (Inversion) Soit X variable aléatoire dont la fonction caractéristique φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors X admet une densité donnée par la formule $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx)\varphi_X(t)dt$.

Exemple 25. La fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$. Celle d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $\varphi(t) = \exp(imt) \exp(-\sigma^2 t^2/2)$.

Théorème 26. Si X admet un moment d'ordre n alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$.

Théorème 27. Si X est à valeur dans $\mathbb{Z}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t) \exp(-int)dt$.

Corollaire 28. Si deux variables aléatoires discrètes ont la même fonction caractéristique, alors elles ont la même loi.

Proposition 29. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \varphi_Y$.

2.3 Fonction génératrice

Définition 30. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k)s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Proposition 31. Soit X va discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G .

1. G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ au moins.
2. $G(1) = 1$ et $G(t) \in [0, 1]$ pour $t \in [0, 1]$.
3. G est absolument monotone sur $[0, 1]$: toutes ses dérivées successives sont positives.

Théorème 32. On peut récupérer les probabilités p_n à partir des dérivées successives de G en 0 : $p_n = P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi la fonction génératrice caractérise la loi de X , deux variables aléatoires de même fonction génératrice ont la même loi.

Théorème 33. Une va discrète X est intégrable si et seulement si G est dérivable à gauche en 1 et alors $\mathbb{E}[X] = G'_g(1)$. Plus généralement X est intégrable k fois si et seulement si G est k fois dérivable à gauche en 1. notamment pour $k = 2$ X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

Théorème 34. Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) + G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.

Exemple 35. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Théorème 36. (Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re}(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$ et si $A(r) = O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.

Lemme 37. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(as)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 38. Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.

3 Convergence en loi

Définition 39. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Remarque 40. Il n'y a pas unicité de la limite, si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$ alors on peut seulement dire que X et Y ont la même loi mais ne sont pas forcément égales.

Théorème 41. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 42. (Lévy) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires réelles et X variable aléatoire réelle. On a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 43. (TCL) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid et L^2 . On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_1)$ alors on a que la suite $\left(\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Application 44. (Stirling) On a $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

4 Annexe

Lois continues					
Nom	$X(\Omega)$	Densité $f(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$	$\varphi(t)$
Uniforme $\mathcal{U}([a; b])$	$[a; b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$
Normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}$	m	σ^2	$e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2 / 2}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{1 - it/\alpha}$

Lois discrètes						
Nom	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}\{X = k\}$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$	$G(t)$	$\varphi(t)$
Uniforme	$[1; n]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$	$\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} p_1 = p \\ p_0 = 1-p \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$	$1-p+pe^{it}$
Binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	$[0; n]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$	$(1-p+pe^{it})^n$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$		$\frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$		

DEV 1 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 36 et 38
DEV 2 : Stirling par TCL 44
DEV 3 : Levy et TCL 41, 42 et 43

Références

- [APP24] Walter APPEL : Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités Ed. 1. De Boeck supérieur, 2024.
[HQ17] Martine QUEFFELEC HERVÉ QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.
[MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbb{E}[f(X)]$ à l'aide de la loi de X , les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au coeur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être

connues. Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.