

# Leçon 253: Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Dans cette leçon on considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 1 Généralités

### 1.1 Parties convexes

**Définition 1.** — Soient  $x, y \in E$ , on appelle segment de  $E$  l'ensemble  $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$ .

— On dit que  $A \subset E$  est convexe lorsque pour tout  $x, y \in A$  le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $A$ .

*Exemple 2.* Les intervalles sont les parties convexes de  $\mathbb{R}$ . Les boules d'un EVN le sont aussi.

**Proposition 3.** Dans un EVN on a :  $A$  convexe  $\implies A$  connexe par arc ( $\implies A$  connexe).

*Exemple 4.* Les réciproques sont généralement fausses, par exemple dans  $\mathbb{R}^2$  on a  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  connexe par arc non convexe.

**Proposition 5.** Si  $A$  est convexe alors  $\overset{\circ}{A}$  et  $\overline{A}$  sont aussi convexe.

**Proposition 6.** Une intersection de parties convexe est convexe.

### 1.2 Fonctions convexes

Dans cette partie  $(E, \|\cdot\|)$  est un EVN,  $I \subset E$  est convexe et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  application.

**Définition 7.** L'application  $f$  est dite convexe lorsque pour tout  $a, b \in I$  et tout  $t \in [0, 1]$  on a  $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$ . L'application est dite concave lorsque  $-f$  est convexe. Lorsque l'inégalité est stricte pour  $t \in ]0, 1[$  on dit que la fonction est strictement convexe (resp concave).

*Exemple 8.* Une norme est convexe. La fonction exponentielle réelle est convexe. La fonction logarithme népérien est concave.

**Théorème 9.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . On a les équivalences suivantes :

1.  $f$  convexe,
2.  $f'$  croissante,
3. La courbe de  $f$  est au dessus de toutes ses tangentes.

**Corollaire 10.** Une fonction  $f$  deux fois dérivable est convexe si et seulement  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

**Théorème 11.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si pour tout  $x, y \in I$  on a  $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

**Définition 12.** On dit qu'une fonction  $f$  est logarithmiquement convexe lorsque la fonction  $\ln(f)$  est convexe.

**Proposition 13.** Une fonction logarithmiquement convexe est convexe.

**Définition 14.** On définit pour  $x > 0$  la fonction  $\Gamma$  d'Euler par  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  et la fonction Beta pour  $x, y > 0$  définie comme  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ .

**Proposition 15.** La fonction  $\Gamma$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  et convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2.  $\Gamma$  est log-convexe donc convexe.
3.  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et pour  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\Gamma(n+1) = n!$ .
4. La fonction Beta vérifie  $B(x, y) = B(y, x)$  et  $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$ .
5.  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

## 2 Applications à l'étude des extrema

### 2.1 Calcul différentiel

**Lemme 16.** Soit  $C$  convexe non vide et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  application strictement convexe sur  $C$ . Alors il existe au plus un point  $x \in C$  minimisant  $f$  sur  $C$ .

**Proposition 17.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et dérivable en  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $f'(\alpha) = 0$  alors  $f$  admet un minimum global en  $\alpha$ .

**Proposition 18.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et admet un minimum local alors ce minimum est global.

**Théorème 19.** (Méthode de Newton) Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $[c, d]$ , on suppose que  $f(x) < 0 < f(d)$  et  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [c, d]$ . On considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_{n+1} = F(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$  avec  $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . On a alors :

1.  $f$  possède une unique racine  $a$  qui vérifie pour tout  $x \in [c, d]$  qu'il existe  $z \in [a, x]$  tel que  $F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x - a)^2$ .
2. Il existe  $C > 0$  tel que  $|F(x) - a| \leq C|x - a|$  pour tout  $x \in [c, d]$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  soit stable par  $F$ . Pour tout  $x_0 \in I$  la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge à l'ordre 2 vers  $a$  dans  $I$ .
3. Si de plus  $f''(x) > 0$  pour tout  $x \in [c, d]$  alors le résultat est vrai sur  $I = [a, d]$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante (ou constante) et on a :  $0 \leq x_{n+1} - a \leq X(x_n - a)^2$  puis  $x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ .

*Remarque 20.* L'objectif de la méthode de Newton dans le contexte des extrema est de rechercher des points critiques avant de voir si se sont des extrema.

### 2.2 Espaces de Hilbert

**Proposition 21.** (Identité du parallélogramme) Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $x, y \in E$ , alors  $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

**Théorème 22.** (Projection sur un convexe fermé) Soit  $C$  une partie fermée, convexe et non vide de  $E$ . Alors pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $y \in C$  tel que :  $\|x - y\| = d(x, C)$ .

Ce point est appelé **projeté de  $x$  sur  $C$**  et noté  $P_C(x)$ , et possède la propriété caractéristique suivante :  $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$

**Corollaire 23.** Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent on a :  $\forall x_1, x_2 \in E, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

**Proposition 24.** Soit  $F$  un sous espace vectoriel fermé de  $E$ . Alors  $P_F$  est un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $x \in E$ , alors  $P_F(x)$  est l'unique élément  $y \in F$  tel que :  $y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ .

**Corollaire 25.** Pour tout sous espace vectoriel fermé  $F$  de  $E$ , on a :  $E = F \oplus F^\perp$

**Théorème 26.** (de représentation de Riesz) L'application de  $E$  dans  $E^*$  définie par  $\Phi : y \mapsto \phi_y = \langle \cdot, y \rangle$  est une isométrie surjective. C'est à dire, pour toute forme linéaire continue  $\phi$  sur  $E$ , il existe un unique  $y \in E$  tel que  $\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y \rangle$ , de plus  $\|\phi\| = \|y\|$ . Cette application  $\Phi$  est de plus antilinéaire.

## 3 Inégalités de convexité

### 3.1 Inégalités usuelles

**Proposition 27.** (Arithmético-géométrique) Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  on a alors  $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .

**Lemme 28.** Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors pour tout  $u, v \in \mathbb{R}_+$  on a  $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$ .

**Théorème 29.** (Young) Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors pour tout  $a, b > 0$  on a  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

**Théorème 30.** (Hölder) Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors pour tout  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$  on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Théorème 31.** (Minkowski) Soient  $p \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$ , on a alors  $\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .

### 3.2 En intégration

**Définition 32.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Pour  $p > 0$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable on pose  $\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$  et  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$  le sup essentiel de  $f$ . On définit aussi  $\mathcal{L}^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables} \mid \|f\|_p < +\infty\}$  et les espaces  $L^p(X)$  comme le quotient des  $\mathcal{L}^p(X)$  par la relation d'équivalence d'égalité  $\mu$  presque partout.

**Théorème 33.** (Hölder) Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors pour  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  et  $g \in \mathcal{L}^q(X)$  on a  $fg \in \mathcal{L}^1(X)$  et  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

**Théorème 34.** (Minkowski) Soient  $p \geq 1$  et  $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$  alors on a  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

**Corollaire 35.** Pour  $p \in [1, +\infty]$  l'application  $\|\cdot\|_p$  est une semi-norme sur  $\mathcal{L}^p(X)$  et une norme sur  $L^p(X)$ . Ainsi les espaces  $L^p(X)$  sont des espaces vectoriels normés.

**Théorème 36.** (Jensen) Soit  $I$  convexe de  $E$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est convexe si et seulement si pour toute combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$  telle que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  on a  $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$ .

## 4 Annexe

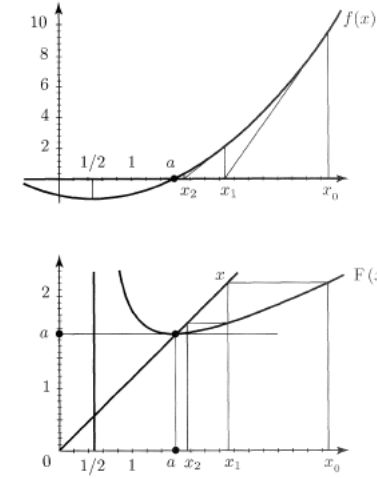
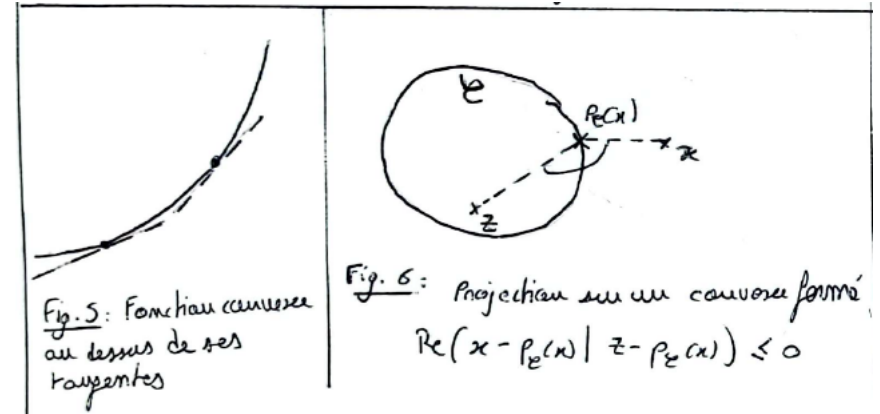


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation  $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$  revient à itérer la fonction  $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$ .



DEV 1 : Projection convexe fermé 22, 23 et 26  
DEV 2 : Méthode de Newton 19  
DEV 3 : Etude de Gamma 15

## Références

[FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [GP05] Vincent BECK GABRIEL PEYRE, Jérôme MALICK : Objectif agrégation. HK, 2005.
- [HAS18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

#### RAPPORT DU JURY :

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions  $C^1$  ou  $C^2$  sur un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc. Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.