

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues telles que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

1 Transformée dans L^1

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lorsqu'elle existe on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\xi t} dt$.

Lemme 2. (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ existe et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$.

Théorème 3. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\hat{f}$ est continue et $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Définition 4. On appelle transformation de Fourier l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) ; f \mapsto \hat{f}$.

Corollaire 5. La transformation de Fourier $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est une application linéaire continue.

Exemple 6. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(0) = b - a$ et $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(\xi) = \frac{2 \sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2}$ sinon.

Définition 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note :

1. $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; x \mapsto \overline{f(x)}$,
2. La symétrisée de f notée $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; x \mapsto f(-x)$,
3. La translaté de f notée $\tau_a(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; x \mapsto f(x - a)$.

Proposition 8. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a : $\mathcal{F}(\check{f}) = (\mathcal{F}(f))$ et $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{(\mathcal{F}(f))}$.

Corollaire 9. Si f est paire (resp impaire) alors $\hat{f}$ est paire (resp impaire).

Proposition 10. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ et $\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi)$

Exemple 11. Soit $a > 0$ alors $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\xi^2/4a}$.

1.2 Convolution et inversion

Définition 12. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ le produit de convolution de f par g est $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt$.

Proposition 13. Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$

Exemple 14. Il n'existe pas de neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 15. (Formule de dualité) Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv$.

Théorème 16. La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est une application injective.

Exemple 17. L'équation de convolution $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 18. (Formule d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}$

Proposition 19. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

1.3 Dérivation et transformée

Proposition 20. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Corollaire 21. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. Si $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f^{(k)}} = i^k \xi^k \widehat{f}(\xi)$.

Proposition 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, si $g : x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ est dérivable et $(\widehat{f})'(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Corollaire 23. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$ les fonctions $g_l : x \mapsto x^l f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ est k fois dérivable, $(\widehat{f})^{(k)}$ est continue bornée sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})^{(k)}(\xi) = (-i)^k \widehat{g_k}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exemple 24. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto (x-1)^2 e^{-x^2}$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}(\frac{1}{2} + i\xi + \frac{1}{4}\xi^2)e^{-x^2}$.

2 Transformée dans d'autres espaces

2.1 Dans l'espace de Schwartz

Définition 25. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^k f(x)| = 0$.

Lemme 26. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 27. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ alors :

- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ à décroissance rapide alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.

Définition 28. On appelle espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide.

Remarque 29. On a l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Proposition 30. L'espace de Schwartz est un espace vectoriel stable par dérivation, par multiplication par un polynôme, par produit, par conjugaison et par translation.

Théorème 31. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier.

Corollaire 32. La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une application bijective et bicontinue. Son application inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 33. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2.2 Dans L^2

Théorème 34. (Formule de Parseval-Plancherel) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

Théorème 35. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors :

1. Il existe une suite $(f_n)_n$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$,
2. Pour une telle suite $(f_n)_n$, la suite $(\widehat{f_n})_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 36. La limite $\tilde{f}$ définie par le théorème ci-dessus est appelée transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 37. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et que l'on note $\widehat{f}$ sa transformée dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\tilde{f}$ sa transformée dans $L^2(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} = \tilde{f}$.

Proposition 38. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ on pose $\varphi_1(\xi) = \int_{-A}^A f(t)e^{-i\xi t} dt$ et $\psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{f}(t)e^{i\xi t} dt$. On a alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$.

Corollaire 39. Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt} dt$

Théorème 40. (Dualité) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ de transformée dans $L^2(\mathbb{R})$ respectives $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. Alors $\tilde{f}g$ et $f\tilde{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\tilde{g}(u)du$

3 Application aux probabilités

Définition 41. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Proposition 42. Soient X et Y des variables aléatoires réelles, alors :

1. φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,
2. $P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$
3. Si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$

Définition 43. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 44. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 45. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 46. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sqrt{n\sigma}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$

DEV 1 : Injectivité de la transformée 11,15 et 16

DEV 2 : Levy et TCL 44, 45 et 46

Références

- [AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.
- [HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L1, classe de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, ou L2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat.

La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.

Proposer comme développement le théorème d'échantillonnage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.