

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications

On suppose connues les propriétés usuelles des espaces $\mathcal{L}^p$.

1 Généralités

1.1 Rappels et notations[AMR08]

Définition 1. Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite périodique lorsqu'il existe un nombre $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$

Exemple 2. Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $s \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \exp(ix)$ sont 2π périodiques.

Remarque 3. L'étude d'une fonction T périodique f peut toujours se ramener à l'étude d'une fonction 2π périodique g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$. Ainsi on ne s'intéressera qu'au cas des fonctions 2π périodiques.

Définition 4. On note $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π périodiques continues par morceaux et $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous espace vectoriel formé des applications continues.

Définition 5. Pour $p \in [1, +\infty[$ on note $\mathcal{L}_{2\pi}^p$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π périodiques, mesurables et telles que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < +\infty$. Pour les fonctions de cet ensemble on pose $\|f\|_p = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p}$.

On note $\mathcal{L}_{2\pi}^\infty$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π périodiques, mesurables et essentiellement bornées. Pour les fonctions de cet ensemble on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C > 0, |f(x)| \leq C, \text{pp}\}$.

Définition 6. Pour $p \in [1, \infty]$ on définit les espaces $L_{2\pi}^p = \mathcal{L}_{2\pi}^p / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout.

Remarque 7. Les espaces $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ sont des espaces de Banach.

Proposition 8. Soient $p, q \in [1, \infty]$ avec $p < q$ alors $\mathcal{C}_{2\pi} \subset L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^q \subset L_{2\pi}^p$ et si $f \in L_{2\pi}^q$ alors $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Proposition 9. L'espace $L_{2\pi}^2$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Définition 10. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par $e_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$ l'application définie par $e_n(x) = \exp(inx)$.

Définition 11. On appelle polynôme trigonométrique toute application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; x \mapsto \sum_{k=-n}^n \alpha_k e_k(x)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n)$ une famille de complexes.

1.2 Séries de Fourier

Définition 12. Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe défini par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx$.

Remarque 13. Si $f \in L_{2\pi}^2$ alors $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Définition 14. Pour $f, g \in L_{2\pi}^1$, le produit de convolution $f * g$ en x lorsqu'il existe est donné par $f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x)g(t)dt$.

Remarque 15. Pour $f, g \in L_{2\pi}^1$ le produit de convolution a un sens pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$.

Proposition 16. Soient $f \in L_{2\pi}^1$, $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{Z}$ et $g \in L_{2\pi}^\infty$ alors :

1. $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ avec $\check{f}(x) = f(-x)$,
2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
3. $f * e_n = c_n(f)e_n$,
4. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$,
5. Si de plus $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^\infty$ par morceau alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

Théorème 17. (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L_{2\pi}^1$ on a $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$.

Corollaire 18. (p201) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^k$, alors

$$c_n(f) = o_{|n| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|n|^k} \right)$$

Définition 19. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle série de Fourier de f , la série $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f)e_n(t) + c_{-n}(f)e_{-n}(t))$

Exemple 20. Si $f \in L_{2\pi}^1$ et $k \geq 2$ telle que $c_n(f) = o_{|n| \rightarrow \infty} (|n|^{-k})$ alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}$.

1.3 Sommes de Cesàro et noyaux

Définition 21. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on note $\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$ la N -ième somme de Cesàro de la série de Fourier de F .

Définition 22. On dit que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge au cens de Cesàro au point x lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x)$ existe.

Proposition 23. 1. Si $S_N(f)(x)$ converge vers $l(x)$, alors $\sigma_N(f)(x)$ aussi.
2. Si $S_N(f)$ converge vers f dans L^p alors $\sigma_N(f)$ aussi.

Définition 24. La fonction $D_N := \sum_{k=-N}^N e_k$ avec $e_n(x) = \exp(inx)$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N .

Proposition 25. 1. La fonction D_N est une fonction paire, 2π périodique et vérifie $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$.

2. D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$.

3. Pour tout $f \in L_{2\pi}^1$ on a $S_N(f) = f * D_N$.

Définition 26. La fonction $K_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé noyau de Fejér d'ordre N .

Proposition 27. 1. On a $K_N = \sum_{n=-N}^n \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ et $\sigma_N(f) = f * \sum_{n=-N}^n \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f)e_n$.

2. La suite $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité dans $L_{2\pi}^1$.

2 Modes de convergence

2.1 Au cens de Cesàro

Théorème 28. (Fejér) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors :

1. On a $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$
2. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$

Théorème 29. Si $f \in L_{2\pi}^p$ avec $p \in [1, \infty[$ alors :

1. On a $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$
2. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Corollaire 30. (Weierstrass trigonométrique) Le sous espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans $(\mathcal{C}_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ et dans $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Remarque 31. Ce théorème nous donne que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

Théorème 32. (Weierstrass) Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynôme.

Théorème 33. 1. Si $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$ partout sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f, g \in L_{2\pi}^1$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$ dans $L_{2\pi}^1$.

2.2 Convergence quadratique

Théorème 34. (Parseval) Si $f \in L_{2\pi}^2$ alors :

1. $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique : $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

C'est à dire que dans $L_{2\pi}^2$ $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$.

2. On a la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Corollaire 35. Si f est une fonction C^1 sur $[0, 2\pi]$ avec $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ alors :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

Avec égalité si et seulement si $f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

2.3 Convergence simple et normale

Théorème 36. (Dirichlet faible) Soit f est 2π périodique, qui est C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la régularisée $\tilde{f}$ de f . C'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ où $f(x^+)$ (resp $f(x^-)$) est la limite à droite (resp à gauche) de f en x .

Théorème 37. (Dirichlet) Si $f \in C_{2\pi}$ et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Exemple 38. (Fresnel) Les fonctions $t \mapsto \cos(t^2)$ et $t \mapsto \sin(t^2)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \sin(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \cos(t^2)dt$.

Exemple 39. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire et 2π périodique définit par $f(t) = t$ si $0 \leq t \leq \pi/2$ et $f(t) = \pi - t$ si $\pi/2 \leq t \leq \pi$. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

Exemple 40. On connaît les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

DEV 1 : Féjer 28

DEV 2 : Intégrales de Fresnel 38

Références

[AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.

[AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.

[MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Les théorèmes de convergence des séries de Fourier ont une place centrale dans cette leçon ; on prendra garde à différencier les hypothèses et à maîtriser les différents types de convergence (simple, uniforme, au sens de Cesàro, Lp. . .) apparaissant dans les énoncés proposés. Les propriétés importantes des noyaux utilisés pour les preuves de ces résultats doivent être clairement explicitées. La théorie L2 permet un point de vue géométrique agréable de la théorie. Dans ce cadre, on aura en tête l'interprétation de l'identité de Parseval en terme d'isométrie. Les propriétés des coefficients de Fourier sont un incontournable de la leçon, mais ne devront pas prendre une place prépondérante. Les candidates et candidats pourront aborder le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier, via le théorème de Riemann-Lebesgue et le lien entre dérivation et coefficients. Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier, par exemple : calculs de sommes de séries, résolutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, etc. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, au critère de Weyl, à l'inégalité isopérimétrique, à la convergence de la série de Fourier d'une fonction α -höldérienne pour $\alpha \geq 1/2$, etc.