

Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Dans toute cette leçon Ω sera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

1 Régularité des fonctions de variable complexe

Définition 1. On dit que f est holomorphe en $a \in \Omega$ lorsque la limite $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} := f'(a)$ existe.

On dit que f est holomorphe sur Ω lorsque f est holomorphe en tout point de Ω , on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Proposition 2. L'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre et les règles de calculs usuelles concernant la dérivée du produit de la somme ou du quotient sont les mêmes que dans le cas réel.

Définition 3. En posant $f : (x, y) \mapsto f(x + iy)$ on dit que f est Riemann différentiable en $a = a_1 + ia_2 \in \Omega$ lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en (a_1, a_2) et $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$.

Proposition 4. (Conditions de Cauchy-Riemann) f est holomorphe en $a \in \Omega$ si et seulement si f est Riemann différentiable.

Définition 5. On dit que f est analytique dans Ω lorsqu'elle est développable en série entière en tout point de Ω . On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω .

Théorème 6. (Prolongement analytique) Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est nulle dans Ω ,
2. f est nulle dans un voisinage de a ,
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{A}(U)$, alors si f et g sont égales sur un voisinage d'un point de U alors $f = g$.

Théorème 8. (Principe des zéros isolés) Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non nulle. L'ensemble des zéros de f est une partie discrète fermée de Ω .

2 Théorie de Cauchy et conséquences

2.1 Formule de Cauchy

Définition 9. On appelle chemin dans Ω toute application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau. Il est dit fermé lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Théorème 10. Soit γ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, pour $z \in U$ on pose $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$ l'indice de z par rapport à γ . Cette application $U \rightarrow \mathbb{Z}$ est à valeur dans $\mathbb{Z}$ et compte le nombre de tours orientés que fait γ autour de z .

Théorème 11. Soit f continue sur Ω alors f possède une primitive sur Ω si et seulement si pour tout chemin fermé γ dans Ω on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Théorème 12. (Goursat) Soit $\omega \in \Omega$ et f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{\omega\}$. Pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$ on a $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Théorème 13. (Cauchy convexe) Soit U ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $\omega \in U$ et f continue sur U holomorphe sur $U \setminus \{\omega\}$. Alors f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ dans U on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Théorème 14. (Formule de Cauchy) Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe $U \subset \mathbb{C}$, $z \in U \setminus \gamma([a, b])$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ alors $f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

2.2 Conséquences

Théorème 15. Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors :

- f est analytique et le rayon de convergence de sa série en a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.
- Si Ω est convexe et si γ est un chemin fermé dans Ω avec $a \notin \gamma([a, b])$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Théorème 16. (Morera) Soit f continue sur Ω les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe sur Ω ,
2. f est analytique sur Ω ,
3. f possède localement une primitive sur Ω .

Notation 17. Soit $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ pour $z \in D(0, R)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{-n} e^{-int} dt$ où γ est un cercle de rayon inférieur à R parcouru dans le sens direct.

Théorème 18. (Inégalités de Cauchy) Avec les notations précédentes pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\sup\{|f(z)|, |z| = r\}}{r^n}$$

Corollaire 19. (Liouville) Toute fonction entière ($\mathcal{H}(\mathbb{C})$) et bornée est constante.

Théorème 20. (D'Alembert Gauss) Tout polynôme non constant à coefficient complexe possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 21. (Principe du maximum) Soit Ω ouvert borné et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ continue sur $\overline{\Omega}$. Alors f atteint son maximum à la frontière de Ω .

Théorème 22. (Lemme de Schwarz) Soit $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0, 1)$, on a alors :

- $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0, 1)$
- $|f'(0)| \leq 1$

Si de plus $|f'(0)| = 1$ ou bien il existe $z \in D(0, 1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(z)| = |z|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

Proposition 23. (P120) Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ne s'annulant pas et telle que $f(0) = 1$, alors il existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $f = \exp(g)$.

3 Fonctions méromorphes

3.1 Développement en série de Laurent

Définition 24. Soit $a \in \Omega$ et $0 < r < R$, on note $C(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} | r < |z - a| < R\}$ la couronne ouverte.

Théorème 25. (Cauchy couronne) Soit $C = C(a, r, R)$ une couronne, $f \in \mathcal{H}(C)$ et des réels $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. On note γ_1 (resp γ_2) le cercle de centre a de rayon ρ_1 (resp ρ_2) parcouru dans le sens direct. Pour $z \in \Omega$ tel que $\rho_1 < |z| < \rho_2$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Théorème 26. Soient $a \in \mathbb{C}$, $(r, R) \in [0, \infty]^2$ et f holomorphe dans la couronne $C = C(a, r, R)$. Il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que la série (dite de Laurent) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$ converge dans C et vérifie pour

$$\text{tout } z \in C, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - a)^n.$$

De plus si $r < \rho < R$ et γ le cercle de rayon ρ parcouru dans le sens direct, alors on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) e^{-int} dt$$

Exemple 27. Pour $z \in C(0, 1, 2)$ on a $\frac{\exp(\frac{1}{z})}{1-z} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}) \frac{1}{z^{n+1}}$

Définition 28. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D^*(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\}$ le disque épointé de rayon r et de centre a .

Définition 29. Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, on dit que a est une singularité isolée de f . Lorsque f se prolonge par holomorphic au voisinage de a on dit que c'est une fausse singularité.

Théorème 30. Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ alors f ne vérifie qu'une seule des propriétés suivantes :

- f a une fausse singularité en a ,
- Il existe une unique $(a_{-1}, \dots, a_{-m}) \in \mathbb{C}^m$ avec $1 \leq m < +\infty$ et $a_{-m} \neq 0$ telle que la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une fausse singularité en a . On dit alors que a est un pôle d'ordre m de f ,

— Pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$, $f(D^*(a, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit que a est une singularité essentielle de f .

Définition 31. Une fonction f est dite méromorphe dans Ω lorsqu'il existe une partie $A \subset \Omega$ finie telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et que tout point de A est un pôle de f .

Proposition 32. Soit f méromorphe sur Ω , alors f' est aussi méromorphe sur Ω et possède les mêmes pôles mais d'ordre $m + 1$.

3.2 Résidus

Définition 33. Soit $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m d'une fonction f méromorphe. La partie principale de f en a est

$P(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_{-k}(z-a)^{-k}$. Le résidu de f en a est le coefficient α_{-1} noté $\text{Res}(f, a)$.

Lemme 34. Si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \gamma([a, b])$ alors on a $\int_{\gamma} P(z)dz = \text{Ind}_{\gamma}(a)\text{Res}(f, a)$

Exemple 35. Soit f méromorphe et $a \in \Omega$ un pôle de multiplicité m . Au voisinage de a on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes et $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ avec $h_1(a) \neq 0$. On a si $m = 1$ que $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h_1(a)}$ et remarquons que $h_1(a) = h'(a)$

Théorème 36. (Des résidus) Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n \in U$ distincts et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne rencontre aucun a_k alors on a :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Exemple 37. On a $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ en intégrant sur la demi couronne $C(0, \varepsilon, R)$.

4 Application aux probabilités

Définition 38. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 39. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Théorème 40. Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.

Définition 41. On dit qu'une fonction entière est de type exponentielle lorsqu'il existe $a, b > 0$ tels que $|f(z)| \leq a \exp(bz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 42. (Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} \text{Re}(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$ et si $A(r) = O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.

Lemme 43. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(as)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 44. Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.

DEV 1 : Intégrale de Dirichlet $\frac{\sin(x)}{x}$ 37 ou zéros isolés ?
DEV 2 : Indécomposabilité de loi de Poisson 42 et 44

Références

- [HQ17] Martine QUEFFELEC HERVÉ QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.
[Tau20] Patrice TAUVEL : Analyse complexe pour la licence 3. Dunod, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux. Les candidates et candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.