

Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 Séries entières et disque de convergence

1.1 Généralités

Définition 1. On appelle série entière toute série de fonction $\sum f_n$ dans laquelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $f_n = a_n x^n$ où $(a_n)_n$ est une suite de complexes. Une telle série est notée $\sum a_n x^n$.

La somme d'une série entière est l'application définie en tout point où cela a un sens par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Lemme 2. (Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, supposons que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème 3. Il existe un unique réel R tel que :

- si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge.
- Pour tout $0 \leq r < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur la boule fermée $B_f(0, R)$.

Définition 4. L'élément $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ défini ci-dessus par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$, est appelé rayon de convergence de la série entière. Le disque ouvert $D(0, R)$ est le disque de convergence de la série.

Remarque 5. En $|z| = R$ c'est le cercle d'incertitude on ne peut pas prévoir le comportement de la série. Par exemple la série $\sum z^n$ diverge sur le cercle, la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge sur le cercle et la série $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en 1 mais converge sur le reste du cercle.

On considérera ici que $\frac{1}{R} = 0$ si $R = +\infty$ et $\frac{1}{R} = +\infty$ si $R = 0$.

Proposition 6. (D'Alembert) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}_+}$ alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 7. Pour la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{n!}{(n+1)!}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{1}{n+1}| = 0$ donc $R = +\infty$.

Théorème 8. (Hadamard) Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{L}$ où $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Exemple 9. Le rayon de convergence de $\sum 2^n z^{2n}$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollaire 10. (Cauchy) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite de terme général $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 11. Pour la série $\sum \frac{n z^n}{2^n}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ donc $R = 2$.

1.2 Opérations sur les séries entières

Proposition 12. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b .

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $a_n \sim_{n \rightarrow \infty} b_n$ alors $R_a = R_b$.
4. Si il existe une fraction rationnelle non nulle F vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = F(n)$, alors le rayon de convergence est de 1.

Théorème 13. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence R_a et R_b on a alors :

1. Le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus pour $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

2. En multipliant $\sum a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$ on ne change pas le rayon de convergence de la série et pour $|z| < R_a$ on a

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n$$

3. Le rayon de convergence de la série produit (produit de Cauchy) $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus pour $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

2 Fonctions développables en séries entières

2.1 Sur $\mathbb{R}$

Définition 14. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite développable en série entière lorsqu'il existe un voisinage de 0 sur lequel la fonction f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Proposition 15. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonction $(R_n)_n$ définie par $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ tende simplement vers 0 sur $] -\alpha, \alpha[$.

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a alors un rayon de convergence supérieur à α et f est égale à la somme de cette série sur $] -\alpha, \alpha[$.

Remarque 16. Dans la pratique on peut utiliser les formules de Taylor qui écrivent $R_n(x)$ comme $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ ou $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ pour vérifier si la fonction est développable en série entière.

Proposition 17. Si la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence nul alors f n'est pas développable en série entière.

Remarque 18. La réciproque est fautive, en effet la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ peut avoir un rayon de convergence non nul et sa somme différente de f . Par exemple $f : x \mapsto \exp(-1/x)$ lorsque $x \geq 0$ et $x \mapsto 0$ lorsque $x \leq 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n et donc la somme ne coïncide pas avec f quel que soit α .

Corollaire 19. Pour tout entier $p \geq 0$, la fonction somme de la série entière admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 dont la partie régulière est donnée par $a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$.

2.2 Sur $\mathbb{C}$

Définition 20. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est analytique dans U lorsqu'elle est développable en série entière en tout point de U . On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U .

Exemple 21. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z - a| < |a|$ on a $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z - a)^n$

Théorème 22. (Prolongement analytique) Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe, $a \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est identiquement nulle dans U ;
2. f est identiquement nulle sur un voisinage de a ;
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 23. Soit U ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U , alors $f = g$ sur U .

Définition 24. On dit qu'une partie $A \subset U \subset \mathbb{C}$ est une partie localement finie de U lorsque tout $z \in U$ possède un voisinage V tel que $V \cap A$ soit fini.

Théorème 25. (Zéros isolés) Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe et $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle. L'ensemble des zéros de f noté $Z(f)$ est une partie localement finie de U .

Théorème 26. (Cauchy) Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe, $\omega \in U$ et f continue sur U , holomorphe sur $U \setminus \{\omega\}$. Alors f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ dans U on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Théorème 27. (Morera) Les fonctions holomorphes sont les fonctions analytiques.

Théorème 28. Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(D(0, R))$, alors pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\sup\{|f(z)|; |z| = r\}}{r^n}$$

Corollaire 29. (Liouville) Toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) bornée est constante.

Corollaire 30. (D'Alembert Gauss) Tout polynôme à coefficients complexes non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 31. (Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re}(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$ et si $A(r) = O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.

Lemme 32. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(as)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3 Applications

3.1 Dénombrement

Corollaire 33. Soit E ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E est fini de cardinal $2^{|E|}$.

Définition 34. Soit $I_n = \{1, \dots, n\}$ on appelle dérangement de I_n toute permutation σ n'ayant aucun point fixe.

Théorème 35. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on note D_p l'ensemble des dérangements de I_p , c'est-à-dire les permutations sans point fixe. On pose $\delta_p = |D_p|$ et on a $\delta_1 = 0$ et par convention $\delta_0 = 1$. La formule générale est $\lfloor \frac{n!}{e} + 1/2 \rfloor$.

3.2 Équations différentielles

Théorème 36. Si $a_0, \dots, a_{p-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont développables en série entières au voisinage de $t_0 \in I$, alors l'équation $(E) = y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k y^{(k)} + b$ admet une solution développable en série entière au voisinage de t_0 dont on peut trouver les coefficients.

Exemple 37. L'équation différentielle (de Bessel) admet une unique solution développable en série entière en 0 et valant 1 en 0 qui est $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^n$.

3.3 Probabilités

Définition 38. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Proposition 39. Soit X va discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G .

1. G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ au moins.
2. $G(1) = 1$ et $G(t) \in [0, 1]$ pour $t \in [0, 1]$.
3. G est absolument monotone sur $[0, 1]$: toutes ses dérivées successives sont positives.

Théorème 40. On peut récupérer les probabilités p_n à partir des dérivées successives de G en 0 : $p_n = P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi la fonction génératrice caractérise la loi de X , deux variables aléatoires de même fonction génératrice ont la même loi.

Théorème 41. Une va discrète X est intégrable si et seulement si G est dérivable à gauche en 1 et alors $\mathbb{E}[X] = G'_g(1)$. Plus généralement X est intégrable k fois si et seulement si G est k fois dérivable à gauche en 1. notamment pour $k = 2$ X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

Théorème 42. Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) + G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.

Exemple 43. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Théorème 44. *Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.*

DEV 1 : Équation de Bessel 37 [FRA12]
DEV 2 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 31 et 44
DEV 3 : Nombre de dérangements de S_n 35

Références

- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [FRA12] Serge FRANCINO : Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures . Analyse . Tome IV. Cassini, 2012.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Editions Ellipses, 2021.
- [HQ17] Martine QUEFFELEC HERVÉ QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.
- [Tau20] Patrice TAUVEL : Analyse complexe pour la licence 3. Dunod, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés. Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients. Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un

théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes. Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytiques.