

Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Dans ce chapitre X sera un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé quelconque.

1 Suites de fonctions

1.1 Mode de convergence

On considère dans cette partie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'applications de $X \rightarrow E$ et $f : X \rightarrow E$.

Définition 1. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (abrégé CVS) lorsque pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E , on notera $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CVS}} f$. Cela signifie :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f abrégé CVU et noté $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CVU}} f$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Proposition 2. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS vers f .

Remarque 3. La réciproque est fausse avec la suite $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^n$ dont la limite est $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; 1 \mapsto 1, x \mapsto 0 \text{ } x \in [0, 1[$.

Proposition 4. Posons pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur $\mu_n = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f si et seulement si la suite $(\mu_n)_n$ tend vers 0.

Théorème 5. (Cauchy uniforme) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que $n, p \geq N \implies \forall x \in X \|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$. Si E est complet alors la condition est aussi suffisante.

Proposition 6. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de fonctions bornées de $X \rightarrow \mathbb{K}$ qui CVU vers f et g . Alors la suite $(f_n g_n)_n$ CVU vers fg sur X .

1.2 Régularité

Théorème 7. Soit $X \subset F$ partie d'un ev de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions $X \rightarrow E$ CVU vers f . Si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$ alors f est continue en a .

Exemple 8. La suite des $f_n(x) = \exp(-nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et valant 1 en 0. Comme les f_n sont continues et f ne l'est pas la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 9. Soit $X \subset F$ partie d'un ev de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions $X \rightarrow E$ CVU vers f . Soit $a \in \bar{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la limite $b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe. Si E est complet alors on peut interchanger les limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Théorème 10. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions dérivables qui converge simplement vers f . Si la suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément, alors f est dérivable et pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Théorème 11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors la limite f est intégrable et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 12. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0, \pi/2]$ par $f_n(x) = \sin^n(x)$. Cette fonction converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle $[0, a]$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = 0$.

Théorème 13. (Convergence monotone) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Théorème 14. (Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction mesurables positives alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

Théorème 15. (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables telles que :

1. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ μ presque partout avec $f \in \mathcal{L}^1$,
2. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ presque partout.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Exemple 16. Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \leq 1$ alors $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et sinon $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$.

Théorème 17. (Riesz-Fisher) Pour $p \in [1, \infty]$ l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

2 Séries de fonctions

2.1 Mode de convergence

Définition 18. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de $X \rightarrow E$, on appelle série des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noté $\sum f_n$ la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ pour $x \in X$.

Définition 19. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement (resp uniformément) sur X lorsque la suite $(S_n)_n$ converge simplement (resp uniformément) et la fonction limite S s'appelle somme de la série notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Proposition 20. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Exemple 21. La réciproque est fautive par exemple pour $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ la suite converge uniformément vers 0 sur $]1, +\infty[$ mais pas la série.

Définition 22. On dit que la série $\sum f_n$ converge absolument (CVA) sur X lorsque pour tout $x \in X$ la série réelle $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

Proposition 23. Si la série $\sum f_n$ CVA alors elle converge simplement.

Définition 24. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement (CVN) sur X lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et la série $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

Exemple 25. La série $\sum x e^{-nx}$ CVN sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Théorème 26. Si la série $\sum f_n$ CVN sur X alors elle CVA et CVU sur X et on a $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$.

2.2 Régularité

Théorème 27. Soit $a \in X$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction continues en a (resp X), si la série $\sum f_n$ CVU alors la somme de la série est continue en a (resp X).

Exemple 28. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 29. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions dérivables de $I \rightarrow E$, si $\sum f_n$ CVS et que la série $\sum f'_n$ CVU. Alors la fonction somme est dérivable et sa dérivée est la somme de la série des dérivées.

Remarque 30. Si la série des dérivées k -ième CVU alors la dérivée k -ième de la somme est la somme des dérivées k -ièmes.

Théorème 31. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions mesurables à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n \geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ alors les fonctions f_n , $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ et $\sum_{n \geq 0} f_n$ sont intégrables. De plus $\int_X \sum_{n \geq 0} f_n d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_X f_n d\mu$.

Exemple 32. On a $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.

3 Séries de Fourier

Définition 33. Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe défini par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx$.

Remarque 34. Si $f \in L^2_{2\pi}$ alors $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Définition 35. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle série de Fourier de f , la série

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f) e_n(t) + c_{-n}(f) e_{-n}(t))$$

Exemple 36. Si $f \in L^1_{2\pi}$ et $k \geq 2$ telle que $c_n(f) = O(|n|^{-k})$ alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}$.

Théorème 37. (Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re}(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$ et si $A(r) = O(r^d)$ alors $f \in \mathcal{C}_d[X]$.

Lemme 38. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(az)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 39. (Parseval) Si $f \in L^2_{2\pi}$ alors :

1. $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique : $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

C'est à dire que dans $L^2_{2\pi}$ $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

2. On a la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Corollaire 40. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ avec $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ alors :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

Avec égalité si et seulement si $f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Théorème 41. (Dirichlet faible) Soit f est 2π périodique, qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la régularisée $\tilde{f}$ de f . C'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ où $f(x^+)$ (resp $f(x^-)$) est la limite à droite (resp à gauche) de f en x .

Théorème 42. (Dirichlet) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Exemple 43. (Intégrales de Fresnel) Les intégrales suivantes ont pour valeur $\int_{\mathbb{R}} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \cos(t^2) dt$.

4 Applications aux probabilités

Définition 44. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Théorème 45. On peut récupérer les probabilités p_n à partir des dérivées successives de G en 0 : $p_n = P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi la fonction génératrice caractérise la loi de X , deux variables aléatoires de même fonction génératrice ont la même loi.

Théorème 46. Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) + G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.

Exemple 47. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Théorème 48. Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.

Définition 49. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Définition 50. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 51. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 52. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 53. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

DEV 1 : Riesz-Fischer 17
DEV 2 : Intégrales de Fresnel 43
DEV 3 : Levy et TCL 51, 52 et 53
DEV 4 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 37 et 48

Références

- [AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.
- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [HQ17] Martine QUEFFELEC HERVÉ QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.
- [HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.
- [MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés. Les fonctions " spéciales " définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés. Les candidates et candidats peuvent aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Il est préférable, dans ce cas, de présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des

séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales - comme la fonction θ de Jacobi -, la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.