

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

Soit $f : E \times X \rightarrow \mathbb{K}$ avec (E, d) métrique et X quelconque, on pose $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$.

1 Généralités

1.1 Régularité des fonctions

Théorème 1. (Continuité) Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in E$ la fonction $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$ la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue en $u_0 \in E$,
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive telle que pour tout $u \in E$, $|f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout.

Alors F est bien définie sur E et est continue en u_0 .

Remarque 2. On peut étendre la condition locale en u_0 sur E tout entier.

Théorème 3. (Dérivabilité) Si $E = I$ intervalle ouvert non vide. Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in I$, la fonction $f(u, \cdot)$ est intégrable,
2. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe μ presque partout avec $u_0 \in I$.
3. Il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)| \leq g(x)$ μ presque partout.

Alors F est définie sur I et dérivable en u_0 et sa dérivée est $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x)$.

Remarque 4. On peut généraliser le résultat sur I entier mais aussi avec une fonction $\mathcal{C}^k$ par récurrence.

Définition 5. On définit pour $x > 0$ la fonction Γ d'Euler par $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et la fonction Beta pour $x, y > 0$ définit comme $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

Proposition 6. La fonction Γ possède les propriétés suivantes :

1. Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Γ est log-convexe donc convexe.
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. La fonction Beta vérifie $B(x, y) = B(y, x)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.
5. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

Remarque 7. Utilisation en théorie des nombres, prolongement de Zeta, loi de Gamma ou du Xi2.

Théorème 8. (Holomorphie sous l'intégrale) Soit $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. Si f vérifie :

1. Pour tout $z \in \Omega$, $x \mapsto f(z, x)$ mesurable.
2. Pour μ presque tout $x \in X$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω de dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, x)$.
3. Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $\varphi \in L^1(X)$ telle que pour tout $z \in K$, pour tout $x \in X$ on ait $|f(z, x)| \leq \varphi(x)$.

Alors F est bien définie et holomorphe sur Ω de dérivée $F' : x \mapsto \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) dz$.

Exemple 9. La fonction Γ est holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. (Elle peut se prolonger sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.)

2 Transformée de Fourier

2.1 Convolution

Définition 10. Deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. On définit

alors le produit de convolution de f par g par : $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

Proposition 11. *La convolution vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Lorsqu'il existe $f * g(x) = g * f(x)$ et $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$.*
2. *Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie presque partout, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Proposition 12. *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$ et soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, uniformément continue et $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Remarque 13. Le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot)$ muni de la convolution $*$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative sans unité.

Théorème 14. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty]$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*

2.2 Approximation de l'unité

Définition 15. Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
2. $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < \infty$,
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_n| d\lambda_d = 0$.

Exemple 16. — Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-|x|/t}$,

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$,

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Théorème 17. *Soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors ; $\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_p} f$.*

Définition 18. Une suite $(\alpha_n)_n$ est dite régularisante lorsque c'est une approximation de l'unité et pour tout $n \geq 1, \alpha_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 19. *L'espace $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$ et dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

2.3 Transformée

Définition 20. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lorsqu'elle existe on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\xi t} dt$.

Théorème 21. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\hat{f}$ est continue et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Définition 22. On appelle transformation de Fourier l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$; $f \mapsto \hat{f}$.

Corollaire 23. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire continue.*

Exemple 24. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ alors, on a $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(0) = b - a$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^*$ on a $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(\xi) = \frac{2 \sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2}$.

Proposition 25. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ et $\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi)$*

Exemple 26. Soit $a > 0$ alors $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\xi^2/4a}$.

Théorème 27. *(Formule de dualité) Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv$.*

Théorème 28. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est une application injective.*

Exemple 29. L'équation de convolution $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 30. Il n'existe pas de neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 31. *(Formule d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}$*

Proposition 32. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.*

3 Applications aux probabilités

Définition 33. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Proposition 34. Soient X et Y des variables aléatoires réelles, alors :

1. φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,
2. $P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$
3. Si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$

Définition 35. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 36. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 37. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 38. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

DEV 1 : Etude de Gamma 6

DEV 2 : Injectivité de la transformée 26,27 et 28

DEV 3 : Levy et TCL 36, 37 et 38

Références

- [AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.
- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.

[MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.

[MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphic sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs. Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions spéciales définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.