

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

1 Calculs d'intégrales à une variable

1.1 Primitives et utilisations

Théorème 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceau sur $[a, b]$. Alors l'application $F : [a, b] \rightarrow E ; \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $[a, b]$. De plus, F est dérivable à gauche et à droite en tout point de $[a, b]$ et $F'_g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$ et $F'_d(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$.

En particulier si f est continue sur $[a, b]$ alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Remarque 2. On parle d'une primitive car il n'y a pas d'unicité. On peut toujours ajouter une constante à une primitive connue pour en obtenir une autre.

Corollaire 3. Toute application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F et pour toute primitive F de f on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Exemple 4. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ les primitives de x^α , $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{1+x^2}$ sont respectivement $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\ln(x)$ et $\arctan(x)$.

Théorème 5. (IPP) Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Exemple 6. Pour primitiver $\arctan$ on peut faire ceci : $\int_0^x \arctan(u)du = [u \arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}du = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Application 7. (Intégrales de Wallis) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{x/2} \sin^n(x)dx$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2n+2}$ et $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Théorème 8. Soient f et g localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. On a alors $\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt$

Théorème 9. L'intégrale d'une fraction rationnelle $f \in \mathbb{R}(X)$ se calcule par linéarité de l'intégrale après primitivation des éléments de la décomposition en éléments simples.

Exemple 10. $\int_a^b \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} dx = \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_a^b$

Théorème 11. (Changement de variable) Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\varphi([a, b]) \subset I$, alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Exemple 12. On a $\int \frac{x^2}{x^6-1} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right|$

1.2 Sommes de Riemann

Définition 13. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle pas de σ la quantité $|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$.

Définition 14. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux, σ une subdivision de $[a, b]$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\xi_k \in [a_{k-1}, a_k]$. On appelle somme de Riemann relative à f , σ et ξ le nombre $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(\xi_k)$.

Théorème 15. Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt$.

Exemple 16. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$.

2 Méthodes pour les fonctions à plusieurs variables

2.1 Théorèmes de Fubini

Théorème 17. (Fubini-Tonelli) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont bien définies et mesurables. On a de plus dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ les égalités :

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Exemple 18. On peut calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx dy$ de deux manières différentes.

Théorème 19. (Fubini-Lebesgue) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ on a alors :

1. Les fonctions $x \mapsto f(x, \cdot)$ et $y \mapsto f(\cdot, y)$ sont intégrables.
2. Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont intégrables et définies presque partout.
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Exemple 20. Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$ et $f : (x, y) \mapsto xy$ alors $\int_D xy dx dy = \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{24}$.

Exemple 21. On pose sur $[0, 1]^2$ la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

2.2 Changement de variables multidimensionnels

Théorème 22. Soit $\varphi : V \rightarrow U$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est intégrable si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable et on a $\int_U f(t) dt = \int_V f(\varphi(u))|J_\varphi(u)| du$.

Application 23. (Coordonnées polaires) L'application $\phi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ définie par $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme et $J_\phi(r, \theta) = r$.

Exemple 24. (Gauss) Par Fubini et changement par coordonnées polaire on peut montrer que $\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exemple 25. (Intégrales de Fresnel) Les intégrales suivantes ont pour valeur $\int_{\mathbb{R}} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \cos(t^2) dt$

2.3 Théorèmes de convergence

Théorème 26. (Convergence monotone) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 27. (Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction mesurables positives alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

Théorème 28. (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables telles que :

1. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ μ presque partout avec $f \in \mathcal{L}^1$,
2. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ presque partout.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Exemple 29. Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \leq 1$ alors $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et sinon $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$.

Théorème 30. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions mesurables à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n \geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ alors les fonctions f_n , $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ et $\sum_{n \geq 0} f_n$ sont intégrables. De plus $\int_X \sum_{n \geq 0} f_n d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_X f_n d\mu$.

Exemple 31. On a $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.

2.4 Théorèmes de régularité

Soit $f : E \times X \rightarrow \mathbb{K}$ avec (E, d) métrique, on pose $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$.

Théorème 32. (Continuité) Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in E$ la fonction $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$ la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue en $u_0 \in E$,
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive telle que pour tout $u \in E$, $|f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout.

Alors F est bien définie sur E et est continue en u_0 .

Remarque 33. On peut étendre la condition locale en u_0 sur E tout entier.

Théorème 34. (Dérivabilité) Si $E = I$ intervalle ouvert non vide. Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in I$, la fonction $f(u, \cdot)$ est intégrable,
2. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe μ presque partout avec $u_0 \in I$.
3. Il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)| \leq g(x)$ μ presque partout.

Alors F est définie sur I et dérivable en u_0 et sa dérivée est $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x)$.

Remarque 35. On peut généraliser le résultat sur I entier mais aussi avec une fonction $\mathcal{C}^k$ par récurrence.

Définition 36. On définit pour $x > 0$ la fonction Γ d'Euler par $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et la fonction Beta pour $x, y > 0$ défini comme $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

Proposition 37. La fonction Γ possède les propriétés suivantes :

1. Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Γ est log-convexe donc convexe.
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. La fonction Beta vérifie $B(x, y) = B(y, x)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.
5. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

3 Analyse complexe

Définition 38. Soit $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m d'une fonction f méromorphe. La partie principale de f en a est

$P(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_{-k} (z-a)^{-k}$. Le résidu de f en a est le coefficient α_{-1} noté $\text{Res}(f, a)$.

Lemme 39. Si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \gamma([a, b])$ alors on a $\int_\gamma P(z) dz = \text{Ind}_\gamma(a) \text{Res}(f, a)$

Exemple 40. Soit f méromorphe et $a \in \Omega$ un pôle de multiplicité m . Au voisinage de a on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où g et h sont holomorphes et $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ avec $h_1(a) \neq 0$. On a si $m = 1$ que $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h_1(a)}$ et remarquons que $h_1(a) = h'(a)$

Théorème 41. (Des résidus) Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n \in U$ distincts et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne rencontre aucun a_k alors on a :

$$\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_\gamma(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Exemple 42. On a $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ en intégrant sur la demi couronne $C(0, \varepsilon, R)$ mais l'intégrable est impropre au sens de Lebesgue.

DEV 1 : Intégrales de Fresnel 25

DEV 2 : Etude de Gamma 37

DEV 3 : Intégrale de Dirichlet 42

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.

- [MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.
- [Tau20] Patrice TAUVEL : Analyse complexe pour la licence 3. Dunod, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en oeuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L1 ou L2. Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.). Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise crucialement un calcul spécifique d'intégrale, (à pur titre indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements. Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.